目　　录

第一部分　酉群上的调和分析

第二部分 旋转群上的调和分析

第三部分　酉辛群上的调和分析

第一部分　酉群上的调和分析

第0章　导　　言

§0.1　引言

本书以群表示论为工具，来研究典型群上的调和分析．本书分成三个部分．第一部分讨论了酉群上的调和分析，第二部分讨论了旋转群上的调和分析，第三部分讨论了酉辛群上的调和分析．每个部分在处理的方法上有相似之处，但又各自成为独立系统．为了使对群表示论不大熟悉的读者很快理解本书的内容，在本书最后部分还写了一个十分简单的紧致李群的表示论的附录，这个附录取材自 Chevalley [1]．

本书的第一部分是作者于 1959 年至 1962 年在华罗庚教授指导下，对酉群上的调和分析进行系统研究的小结．华罗庚教授成功地应用群表示论的工具来研究多复变数典型域的调和分析．这已总结在他的名著[1]中．他的工作有着多方面的深远的影响．例如，从这些工作出发，可以导出如下的一条定理(见华罗庚[2])：酉群上的连续函数的 Fourier 级数可以 Abel 求和于它自己．这是酉群也是紧致李群上调和分析研究的开创性工作．从群表示论的角度来看，这也是一条有趣的定理．著名的 Peter-Weyl [1]定理告诉我们，紧致群上的连续函数可以用群的不可约表示的线性组合逼近之．Peter-Weyl 定理是一条抽象的逼近定理，而华罗庚的定理则是一条关于有限维(维数大于 1)的紧致群上的连续函数的 Fourier 级数的收敛定理．当然一条收敛定理是优于逼近定理的．

从群的观点，单位圆周是一维的酉群，一般的酉群是单位圆周的直接推广．所以在酉群上研究调和分析是古典调和分析的最直接的推广．由于任意紧致拓扑群可以嵌入到酉群内作为一个子

群，任意紧致齐性空间可以看成为二个紧致群的商，对于任意酉群中的紧致子群上的连续函数可以拓展成为酉群上的连续函数，因此，有关酉群上调和分析的研究对于一般的紧致群及紧致齐性空间也都是有意义的，从多复变函数论的观点出发，如果把多个变数的 Fourier 分析看作多复变数多圆柱的特征流形上的调和分析的研究，那么酉群上的 Fourier 分析可以看作多复变数第一类典型域 $\mathscr{R}_1(n,C)$ 的特征流形上的调和分析的研究. 旋转群上的调和分析可以看作实的第一类典型域 $\mathscr{R}_1(n,R)$ 的特征流形[1]上的调和分析的研究. 而酉辛群上的调和分析的研究则可以看作四元数体上的第一类典型域 $\mathscr{R}_1(n,Q)$ 的特征流形上的调和分析的研究(详细参阅第二、三部分). 也就是说我们所讨论的是复数域、实数域以及四元数体上的第一类典型域的特征流形的调和分析.

这里介绍的处理群上调和分析的方法还可能有其它的应用. 例如，最近钟家庆[3]应用这种方法给出了 Grassmann 流形上的 Schubet 计算的十分明确的公式.

第一部分的书稿写于 1965 年，当时原想独立成篇出版. 由于某些原因，未能实现. 这次，只是对原稿作了很小的修改，改正了一些原稿上的错误，并增加了一些新的内容.

作者愿向自己的导师华罗庚教授表示衷心的感谢，他不但指导了这项研究工作，并且对本书的出版一直给予鼓励和关心，还为本书亲自写了序. 作者愿向钟家庆副教授表示衷心的感谢，他对本书提出了十分宝贵的意见. 在本书的写作过程中，王世坤、陈广晓、贺祖祺、董道珍同志出了不少力，也一并表示感谢.

§ 0.2 酉群上的调和分析

设 U_n 为 n 阶酉群，若 $U \in U_n$，以 $A_{f_1\cdots f_n}(U)$ 表示 U 的标记为 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的酉表示，这里 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是满足 $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots f_n$

---

1) 这里特征流形 $\mathfrak{C}$ 的定义是：$\mathfrak{C}$ 是 $\mathscr{R}_I$ 的边界上具有以下性质的一部分. i)凡 $\mathscr{R}_I$ 内调和的函数一定在 $\mathfrak{C}$ 上取最大值；ii) 对 $\mathfrak{C}$ 上的任一点 ξ，我们可以找到一个 $\mathscr{R}_I$ 上的调和函数 $f(x)$ 在此点取最大绝对值.

的整数. 记 $N(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 为 $A_{f_1\cdots f_n}(U)$ 的阶，我们常用 f 来代表 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$. 若

$$A_f(U) = (a_{ij}^f(U))\ 1 \leqslant i, j \leqslant N(f),$$

那么 $\{\varphi_{ij}^f(U)\}$ 是 U_n 上的就范直交系，这里

$$\varphi_{ij}^f(U) = \sqrt{\frac{N(f)}{C}}\, a_{ij}^f(U),$$

而 C 是 U_n 的体积，即

$$C = (2\pi)^{\frac{1}{2}n(n+1)}/((n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!).$$

$\{\varphi_{ij}^f\}$ 的全体对可积函数来讲是完整的. 记

$$\Phi_f(U) = (\varphi_{ij}^f(U))_{1 \leqslant i, j \leqslant N(f)} = \sqrt{\frac{N(f)}{C}}\, A_f(U),$$

若 $u(U)$ 是可积函数，它可以展开成 Fourier 级数

$$\sum_{f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n} \Phi'_{f_1\cdots f_n}(U),) \tag{0.2.1}$$

这里

$$C_{f_1\cdots f_n} = \int_{U_n} u(V) \Phi_{f_1\cdots f_n}(V) \dot{V},$$

$\operatorname{tr} B$ 表示 B 的迹，B' 表示 B 的转置.

更明白些，

$$\begin{aligned} u(U) \sim & \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \operatorname{tr}\left(\frac{N(f)}{C} \int_{U_n} u(V) \overline{A_{f_1\cdots f_n}(V\overline{U}')\dot{V}}\right) \\ & = \frac{1}{C} \int_{U_n} u(V) \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} N(f) \chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V}U')\dot{V}, \end{aligned} \tag{0.2.2}$$

这里 $\chi_{f_1\cdots f_n}(U)$ 为表示 $A_{f_1\cdots f_n}(U)$ 的特征.

首先很容易的可以证明：如果 $u(U)$ 是实函数，那么它的 Fourier 级数等于它的实部，即

$$\sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n} \Phi_{f_1\cdots f_n}(U)) = \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \operatorname{Re} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n} \Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)).$$

若 $U \in U_n, V \in U_n$，那么

$$u(VU) \sim \frac{1}{C} \int_{U_n} u(W) \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} N(f) \chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{W}U'V')\dot{W}$$

$$= \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W) \overline{A_{f_1\cdots f_n}(W)}\, \overline{A_{f_1\cdots f_n}(\bar{U}')}\, \overline{A_{f_1\cdots f_n}(\bar{V}')} \dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \sqrt{\frac{N(f)}{C}} \operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n} A'_{f_1\cdots f_n}(U) A'_{f_1\cdots f_n}(V)\right).$$

但是

$$u(\bar{V}U) \sim \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W) A_{f_1\cdots f_n}(\bar{W} U' \bar{V}') \dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W) A_{-f_n,\cdots,-f_1}(W \bar{U}' V') \dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W) A_{f_1\cdots f_n}(W) \overline{A'_{f_1\cdots f_n}(U)} A_{f_1\cdots f_n}(V') \dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \sqrt{\frac{N(f)}{C}} \operatorname{tr}\left(\bar{C}_{f_1\cdots f_n} \overline{A'_{f_1\cdots f_n}(U)} A_{f_1\cdots f_n}(V')\right),$$

这是因为

$$A_{f_1\cdots f_n}(U) = \overline{A_{-f_n,\cdots,-f_1}(U)'}$$

及

$$N(f_1, \cdots, f_n) = N(-f_n, \cdots, -f_1),$$

所以

$$\frac{u(VU) + u(\bar{V}U)}{2} \sim \frac{1}{2} \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \sqrt{\frac{N(f)}{C}} \operatorname{tr}\left[C_{f_1\cdots f_n} A'_{f_1\cdots f_n}(U) \cdot A'_{f_1\cdots f_n}(V) + \overline{C_{f_1\cdots f_n} A'_{f_1\cdots f_n}(U)} A_{f_1\cdots f_n}(V')\right].$$

让 $V = I$，即得

$$u(U) \sim \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \operatorname{Re} \operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n} \Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)\right).$$

§ 0.3 调和函数

设$\mathscr{M}$是m维 Riemann 流形，基本张量 $g_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, m)$ 具有一阶连续偏微商，设 $x = (x^1, \cdots, x^m)$ 是任意局部坐标系，

那么有 Beltrami 算子

$$\Delta=\sum_{i,j=1}^{m}g^{ij}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}-\sum_{k=1}^{m}\left\{\begin{matrix}k\\ ij\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x^k}\right),$$

这里 g^{ij} 为 g_{ij} 的逆变张量,且

$$\left\{\begin{matrix}k\\ i,j\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

表示 Christoffel 符号.

设 $u(x)$ 是在 $\mathscr{M}$ 上定义的实函数,且有二阶连续偏微商，若

$$\Delta u(x)=0, \tag{0.3.1}$$

则称 $u(x)$ 为调和的.

对于典型域 $\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$：$I^{(n)}-Z\bar{Z}'>0$，这里 $I^{(n)}$ 表示 n 阶单位矩阵，$Z=(z_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$；微分方程 (0.3.1) 成为

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{l=1}^{n}\bar{z}_{l\alpha}z_{l\beta}\right)\cdot\left(\delta_{jk}-\sum_{r=1}^{n}\bar{z}_{jr}z_{kr}\right)\frac{\partial^2u(z)}{\partial\bar{z}_{j\alpha}\partial z_{k\beta}}=0, \tag{0.3.2}$$

并称其为典型域 $\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$ 上的 Beltrami–华方程，算子 Δ 称为 Beltrami–华算子.

华罗庚[3]解决了如下的 Dirichlet 问题：在 U_n 上已给一个连续函数，存在唯一的解满足方程(0.3.2)，且在 U_n 上的值等于已给函数. 具体写出解，就是 Poisson 积分

$$\frac{1}{C}\int_{U_n}u(U)\frac{\det^n(I-Z\bar{Z}')}{|\det(I-Z\bar{U}')|^{2n}}\dot{U},$$

这里 $u(U)$ 为 U_n 上已给函数，C 为 U_n 的体积.

由此出发，他定义了 U_n 上的 Fourier 级数的 Abel 求和.

由调和函数的理论，我们知道

$$\lim_{Z\to U}\frac{1}{C}\int_{U_n}u(U)\frac{\det^n(I-Z\bar{Z}')}{|\det(I-Z\bar{V}')|^{2n}}\dot{V}=u(U), \tag{0.3.3}$$

这里 Z 趋于 U 是沿着一条不与边界相切的途径进行的. 有关这方面的工作以及它的进一步发展，请参阅华罗庚的《多复变数函数论

中的典型域的调和分析》、《从单位圆谈起》以及陆启铿的《典型流形与典型域》等著作.

在(0.3.3)中特别取 $Z = rU$，此处 $0 < r < 1$ 就有

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{C}\int_{U_n} u(V)\frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I - rU\bar{V}')|^{2n}}\dot{V} = u(U), \quad (0.3.4)$$

所以我们有：$u(U)$ 的 Fourier 级数的 Abel 平均

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \rho^f(r)\,\mathrm{tr}\,(C_{f_1\cdots f_n}\Phi^f_{f_1\cdots f_n}(U)), \quad (0.3.5)$$

当 $r\to 1$ 时，是趋于 $u(U)$的. 这里

$$\rho^f(r) = \frac{1}{N(f)}\cdot\frac{1}{C}\int_{U_n}\frac{(1-r^2)^{n^2}\chi_f(U)\dot{U}}{|\det(I-rU)|^{2n}}. \quad (0.3.6)$$

§ 0.4 Fourier 级数的求和

在本书的第一章中，将用二种方法证明(0.3.4)，一种十分简洁的方法是华罗庚给出的. 另一种证明是不通过多复变数调和函数的理论，而直接从调和分析的技巧得到. 证明的方法有它的代表性，对于满足适当条件的情形都是适用的. 例如应用这个方法可以证明：如果 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数的 Fejér 平均是收敛于它自己的.

至于 $\rho^f(r)$ 的值，我们知道有

(1) $\rho^f(r)\to 1$，当 $r\to 1$；

(2) $\rho^f(r) = \begin{cases} r^{f_1+\cdots+f_n} & 若\ f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0; \\ r^{-f_1-\cdots-f_n} & 若\ 0\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n. \end{cases}$

在第一章中我们给出了 $\rho^f(r)$ 的具体表达式. 计算出 $\rho^f(r)$ 的具体表达式的方法，除了作者的一种方法以外，还有一种是 1974 年钟家庆给出的.

在本书的第二章中，定义了 Fourier 级数(0.2.1)的 Cesàro 平均并且证明了如下的一条 Riesz 型定理：若 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数可以 (C,α) 求和于它自己，但 $\alpha > \frac{n-1}{n}$.

至于 $\frac{n-1}{n}$ 这个值能否改进，这是尚未解决的问题．众所周知，当 $n=1$ 时这已是不能改进的了．

在第二章中还对 Cesàro 求和中最重要且最典型的情形——Fejér 求和进一步加以讨论．

还需提出的是我们所得到的 (c, α) 核，都能用矩阵形式简洁地表达出来．例如 Fejér 核是

$$\frac{1}{D}\left|\frac{\det(I-V^{N+1})}{\det(I-V)}\right|^{2n}.$$

这里 $V\in U_n$，D 是一个与 n，N 有关的绝对常数．

§0.5 收敛判别法

Fourier 级数(0.2.1)的部分和是

$$\sum_{N\geqslant l_1>\cdots>l_n\geqslant -N}\operatorname{tr}\left(C_{l_1\cdots l_n}\Phi'_{l_1\cdots l_n}(U)\right). \tag{0.5.1}$$

这个部分和即所谓"方体"的部分和，它的 Dirichlet 核在第三章中具体给出．这也有二个证明，其中一个代数的证明是由华罗庚给出的．(0.5.1)的 Dirichlet 核可以写成

$$\frac{1}{(n-1)!\cdots 2!1!}\frac{D\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\right)}{D(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}\frac{\det(\overline{V}'^N-V^{N+1})}{\det(I-V)},$$

这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 V 的特征根，而 D 为 Vandermonde 行列式．

当 $N\to\infty$ 时，即使 $u(U)$ 是在 U_n 上连续的，(0.5.1)未必收敛，那么在什么条件下才能保证收敛呢？在第三章中证明了如下的收敛判别准则：若 $u(U)$ 属于 $C^{\frac{n(n-1)}{2}+p}(U_n)$ 函数类 $(0<p<1)$，那么(0.5.1)是收敛的，且收敛于 $u(U)$，此外，还给出了一些有关绝对收敛的判别法．

§0.6 紧致拓扑群上的逼近理论

Peter-Weyl 定理指出了逼近的存在定理，但是具体的写出有限

线性式来却是另一回事. 由于紧致拓扑群可以同构地映入酉群的某一个子群，所以可以依靠前面几章的结果来建立紧致拓扑群上的逼近理论，这是第四章的内容.

我们在第四章中，首先给出了任意紧致拓扑群上连续函数的连续模的定义，这里不但给出了连续函数的有限性逼近式，而且还进一步的给出了可能的误差程度. 例如在第四章中可以证明：如果 $u(g)$ 在紧致拓扑群 G 上连续，且属于 Lip$p$，那么一定存在一个与 N 有关的有限线性逼近式 $P_N(g)$，使

$$|u(g)-P_N(g)|<C/N^p,$$

这里 C 是绝对常数，$0<p<1$.

§0.7 球求和

在本书的第五章中，将讨论球求和，所谓 Fourier 级数的球求和乃是将(0.2.1)考虑为

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\substack{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\\ l_1^2+\cdots+l_n^2=m}}\operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)\right),\tag{0.7.1}$$

这里 $l_1=f_1+n-1$, $l_2=f_2+n-2$, $\cdots$, $l_n=f_n$.

这时候(0.7.1)的收敛及求和的意义都与以前所给出的定义不一样. 在这一章中，首先给出了(0.7.1)的球平均收敛的一条一般的定理，其中包括了重要的(按球求和意义下的) Riesz 平均，即证明了：如果 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数(0.7.1)的 δ 次 Riesz 平均

$$\left(1-\frac{(2n-1)n(n-1)}{6R^2}\right)^{-\delta}\sum_{\substack{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\\ l_1^2+\cdots+l_n^2\leqslant R^2}}\left(1-\frac{l_1^2+\cdots+l_n^2}{R^2}\right)^{\delta}$$
$$\cdot\operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)\right)\tag{0.7.2}$$

当 $R\to\infty$ 时是收敛于 $u(U)$ 的，但 $\delta>\dfrac{n^2-1}{2}$.

此外，还给出了一条 Tauber 型的收敛定理.

第一章 酉群上 Fourier 级数的 Abel 求和

§1.1 典型域的 Poisson-华核

在这一节中，十分扼要地介绍一下多复变数第一类典型域的 Poisson-华核. 如对此需要进一步了解的读者，可仔细阅读华罗庚的著作[1].

E. Cartan[1]证明：有界的可递的不可约的对称域仅有六种可能性；有两类是比较特殊的，其中一类是十六维的，另一类为二十七维的. 除此两类外，余下的四类，华罗庚[1]称之为典型域，并全用矩阵形式加以表达出来. 因此，都可以归入他所研究过的矩阵几何的范畴之中. 其中第一类典型域是 m 行 n 列的矩阵双曲空间，以 $\mathscr{R}_I$ 表示，它是由 m 行 n 列的复元素矩阵 Z 之适合于条件

$$I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0$$

所组成，此处 $I^{(m)}$ 表示 m 行 m 列的单位方阵，$\bar{Z}'$ 表示 Z 行列互换并取共轭复数所得出的矩阵，因此它是 n 行 m 列的. 如果 H 是一个 Hermite 方阵，则以 $H > 0$ 表示 H 是定正的.

特征流形 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{R}$ 的边界上的一部分，凡 $\mathscr{R}$ 内解析函数都在 $\mathscr{C}$ 上取极大绝对值，并且对 $\mathscr{C}$ 上的任一点，$\mathscr{R}$ 中一定有一解析函数在该点取极大值. 域 $\mathscr{R}_I$ 的边界上适合于 $Z\bar{Z}' = I$ 的矩阵 Z 成一特征流形 $\mathscr{C}_I$.

现在我们只考虑 $m = n$ 的情形，此时 $\mathscr{R}_I$ 成为

$$I^{(n)} - Z\bar{Z}' > 0$$

$\mathscr{C}_I$ 成为 $Z\bar{Z}' = I^{(n)}$，即 $\mathscr{C}_I$ 为 n 阶酉群 U_n. $\mathscr{C}_I$ 的总的体积为 $C = (2\pi)^{\frac{1}{2}n(n-1)}/((n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!)$.

$\mathscr{R}_I$ 的解析自同构群 Γ_I 为

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \qquad (1.1.1)$$

此处

$$\bar{A}A' - \bar{B}B' = I, \quad \bar{A}C' = \bar{B}D', \quad \bar{C}C' - \bar{D}D' = -I$$

及

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 1.$$

易证 A,B,C,D 还满足

$$A'\bar{A} - C'\bar{C} = I, \quad A'\bar{B} = C'\bar{D}, \quad B'\bar{B} - D'\bar{D} = -I. \quad (1.1.2)$$

由恒等式

$$(Z\bar{B}' + \bar{A}')(AZ + B) = (Z\bar{D}' + \bar{C}')(CZ + D)$$

可得(1.1.1)的另一表达式

$$W = (Z\bar{B}' + \bar{A}')^{-1}(Z\bar{D} + \bar{C}'). \quad (1.1.3)$$

由(1.1.2)及(1.1.3)得

$$I - \bar{W}W' = (\bar{Z}B' + A')^{-1}(I - \bar{Z}Z')(\bar{B}Z' + \bar{A})^{-1},$$

即(1.1.1)将 $\mathscr{R}_I$ 变为 $\mathscr{R}_I$，$\mathscr{C}_I$ 变为 $\mathscr{C}_I$.

在 $\mathscr{C}_I$ (即 U_n) 上，(1.1.1)定义为

$$V = (AU + B)(CU + D)^{-1}. \quad (1.1.4)$$

这将酉矩阵 U 变到酉矩阵 V. 微分(1.1.4)，应用(1.1.3)得

$$dV = (U\bar{B}' + \bar{A}')^{-1}dU(CU + D)^{-1}.$$

令 $\delta V = V^{-1}dV$ 及 $\delta U = U^{-1}dU$，则由(1.1.3)得到

$$\delta V = \overline{(CU + D)}'^{-1}\delta U(CU + D)^{-1}.$$

记 $\dot{U}$ 为由微分向量所张成的酉体积元，则

$$\dot{V} = |\det(CU + D)|^{-2n}\dot{U}. \quad (1.1.5)$$

这是因为：如果将矩阵 $X = AYB$ 看作独立参数间的线性关系，则这线性关系的行列式为 $\det(AB)^n$.

若 P 为 $\mathscr{R}_I$ 中任一点，即 $I - \bar{P}P' > 0$，容易证明，这等价于 $I - P'\bar{P} > 0$. 可知存在二个非异的矩阵 Q，R，使得

$$\bar{Q}(I - \bar{P}P')Q' = I, \quad \bar{R}(I - P'\bar{P})R' = I$$

令 $A = Q$，$B = -QP$，$C = -R\bar{P}'$，$D = R$，显然这满足条件(1.1.2). 故

$$W = Q(Z - P)(-\bar{P}'Z + I)^{-1}R^{-1} \quad (1.1.6)$$

属于 Γ_I，这将点 $Z = P$ 映到 $W = 0$.

由(1.1.5)变换(1.1.6)将体积元素变为

$$\dot{V} = |\det(-R\bar{P}'U + R)|^{-2n}\dot{U}$$
$$= |\det R|^{-2n}|\det(\bar{U}'P - I)|^{-2n}\dot{U}.$$

由于 $|\det R|^2 = |\det(I - P'\bar{P})|^{-1}$，我们有

$$\dot{V} = \frac{|\det(I - P'\bar{P})|^n}{|\det(P - U)|^{2n}}\dot{U},$$

对任一 $Z \in \mathscr{R}_1$，$U \in \mathscr{C}_1$，我们定义函数

$$P(Z,U) = \frac{\det^n(I - Z\bar{Z}')}{|\det(Z - U)|^{2n}}$$

为 $\mathscr{R}_1$ 的 Poisson- 华核。

从这个定义出发，我们可以证明如下的

定理 1.1.1 若 $u(U)$ 为 U_n 上的连续函数，则

$$u(U) = \lim_{r\to 1}\frac{1}{C}\int_{U_n} P(rU,V)u(V)\dot{V}. \tag{1.1.7}$$

证 不失一般性，先设 $U = I$. 这是因为对任一 $U_0 \in U_n$，设 $\psi(U) = u(UU_0)$. 如(1.1.7)，对于 $U = I$ 已成立，即有

$$\psi(I) = \lim_{r\to 1}\frac{1}{C}\int_{U_n} P(rI,V)\psi(V)\dot{V},$$

而此即

$$u(U_0) = \lim_{r\to 1}\frac{1}{C}\int_{U_n} P(rI,V)u(VU_0)\dot{V}.$$

但是

$$P(rU_0,V) = \frac{(1 - r^2)^{n^2}}{|\det(I - rU_0\bar{V}')|^{2n}} = P(rI,V\bar{U}_0'),$$

进行变数变换 $V \to rU_0^{-1}$，即得(1.1.7)。因此，我们只要证明

$$u(I) = \lim_{r\to 1}\frac{1}{C}\int_{U_n} P(rI,V)u(V)\dot{V}. \tag{1.1.8}$$

变换

$$W = -(V - rI)(-rV + I)^{-1}$$

的体积元素间的变换关系为

$$\dot{W} = (1 - r^2)^{n^2} |\det(I - rV)|^{-2n} \dot{V} = P(rI, V)\dot{V}.$$

故

$$\int_{U_n} P(rI, V) u(V) \dot{V} = \int_{U_n} u((rI - W)(I - rW)^{-1}) \dot{W}.$$

要证(1.1.8)，只要证

$$\lim_{r \to 1} \int_{U_n} \left| u(I) - u\left(\frac{rI - W}{I - rW}\right) \right| \dot{W} = 0.$$

从 Lebesgue 定理，立得此结论。

这个定理及其十分简洁的证明是由华罗庚做出的。原来这个定理的证明是很复杂的，这里的方法可以用到一般的可递域上去，把 Poisson 核看作解析自同构群的元素的相应的体积元素之间的系数，这样一种重要的观点也是华罗庚提出的。还可看出，这个定理是"局部性质"的定理，所以十分容易地可以推广到 $u(U)$ 是 Lebesgue 可积的情形。

§ 1.2　Poisson-华核的展开

先给出一些代数恒等式。

若 $f_1, f_2, \cdots\cdots f_n$ 为一组整数，满足 $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots\cdots \geqslant f_n$，且令 $l_1 = f_1 + n - 1$，$l_2 = f_2 + n - 2, \cdots l_n = f_n$，及

$$M_{f_1, f_2, \cdots, f_n}(x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1} \\ x_1^{l_2}, & \cdots, & x_n^{l_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n} \end{vmatrix},$$

特别

$$M_{0,0,\cdots,0}(x_1, \cdots, x_n) = D(x_1, \cdots, x_n)$$

为 Vandermonde 行列式。命

$$N(f_1, \cdots f_n) = \lim_{\substack{x_1 \to 1 \\ \cdots \\ x_n \to 1}} \frac{M_{f_1, \cdots, f_n}(x_1, \cdots x_n)}{D(x_1, \cdots x_n)},$$

以后常常简单地记 $f = (f_1, \cdots, f_n)$。

定理 1.2.1 若

$$f(x)=\sum_{-M\leqslant\nu\leqslant N}a_\nu x^\nu,$$

此处M，N可以有限，也可以无穷，当为无穷时，要假设上式收敛，则有如下的恒等式：

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2!\cdots(n-1)!}\begin{vmatrix} f(x_1), & \cdots, & f(x_n)\\ f'(x_1), & \cdots, & f'(x_n)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ f^{(n-1)}(x_1), & \cdots, & f^{(n-1)}(x_n)\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{N\geqslant l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant -M}a_{l_1}\cdots a_{l_n}N(f_1,\cdots,f_n)M_f(x_1,\cdots x_n).$$

证明见华罗庚[1].

特别取 $M=0$，$N=\infty$，$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，就有

定理 1.2.2 若 $|x_\nu|<1$ $(\nu=1,2,\cdots n)$，则

$$\frac{1}{\left(\prod_{\nu=1}^{n}(1-x_\nu)\right)^n}=\sum_{f_1>f_2>\cdots>f_n\geqslant 0}N(f_1,\cdots f_n)\frac{M_{f_1,\cdots f_n}(x_1,\cdots x_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}.$$

在定理 1.2.1 中取 $z=xe^{i\theta}$，令 $f(e^{i\theta})=g(\theta)$，则

$$g'(\theta)=if'(e^{i\theta})e^{i\theta}=i\frac{\partial}{\partial x}f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1};$$

$$\begin{aligned}g''(\theta)&=i^2f''(e^{i\theta})e^{2i\theta}+i^2f'(e^{i\theta})e^{i\theta}\\&=i^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1}+i^2\frac{\partial}{\partial x}f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'''(\theta)&=i^3f'''(e^{i\theta})e^{3i\theta}+3i^3f''(e^{i\theta})e^{2i\theta}+i^3f'(e^{i\theta})e^{i\theta}\\&=i^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1}+3i^3\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1}\\&\quad+i^3\frac{\partial}{\partial x}f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1};\end{aligned}$$

························

即 $g^{(l)}(\theta)$ 为 $\left.\frac{\partial^l}{\partial x^l} f(xe^{i\theta})\right|_{x=1}, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x} f(xe^{i\theta})\right|_{x=1}$ 的线性组合，

而 $\left.\frac{\partial^l}{\partial x^l} f(xe^{i\theta})\right|_{x=1}$ 的系数为 1，故

$$
\left|\begin{matrix} f(x_1e^{i\theta_1}), & \cdots, & f(x_ne^{i\theta_n}) \\ \frac{\partial f(x_1e^{i\theta_1})}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_ne^{i\theta_n}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_1^{n-1}} f(x_1e^{i\theta_1}), & \cdots, & \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_n^{n-1}} f(x_ne^{i\theta_n}) \end{matrix}\right|_{x_1=1,\cdots,x_n=1}
$$

$$
= i^{\frac{1}{2}n(n-1)} \left|\begin{matrix} g(\theta_1), & \cdots, & g(\theta_n) \\ g'(\theta_1), & \cdots, & g'(\theta_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ g^{(n-1)}(\theta_1), & \cdots, & g^{(n-1)}(\theta_n) \end{matrix}\right|.
$$

于是我们有

定理 1.2.3 命

$$
g(\theta) = \sum_{-M \leqslant v \leqslant N} a_v e^{iv\theta},
$$

这里 M, N 可以有限，也可以无穷．若为无穷，要假设上式收敛．则有以下的恒等式

$$
\frac{(-i)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2!\cdots(n-1)!} \left|\begin{matrix} g(\theta_1), & \cdots, & g(\theta_n) \\ g'(\theta_1), & \cdots, & g'(\theta_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ g^{(n-1)}(\theta_1), & \cdots, & g^{(n-1)}(\theta_n) \end{matrix}\right|
$$

$$
= \sum_{N \geqslant l_1 > l_2 > \cdots > l_n \geqslant -M} a_{l_1} \cdots a_{l_n} N(f_1, \cdots, f_n) M_f(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}).
$$

现在我们来展开 Poisson-华核．

若 U_n 为 n 阶酉群，$A_{f_1,\cdots,f_n}(U)$ 为标签为 $f = (f_1, \cdots, f_n)$，$f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0$ 的不可约酉表示，此为 $N(f) \times N(f)$ 的酉矩阵．可写为

$$A_f(U)=(a^f_{ij}(U))_{1\leqslant i,j\leqslant N(f)}.$$

对任意 $N(f)\times N(f)$ 的矩阵 $\mathscr{X}$，我们有

$$\int_{U_n} A_f(U)\mathscr{X}\overline{A_g(U)}'\dot{U}=\mathscr{Y},$$

此矩阵有如下性质:

$$A_f(V)\mathscr{Y}\overline{A_g(V)'}=\int_{U_n} A_f(V)A_f(U)\mathscr{X}\overline{A_g(U)'}\,\overline{A_g(V)}'\dot{U}$$

$$=\int_{U_n} A_f(VU)\mathscr{X}\overline{A_g(VU)}'\dot{U}=\mathscr{Y},$$

由 Schur 引理，若 $f\neq g$，则 $\mathscr{Y}=0$；若 $f=g$，则 $\mathscr{Y}=\lambda_f I^{(N(f))}$.
即

$$\{a^f_{ij}(U)\},\ f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0,\ i,j=1,2,\cdots,N(f)$$

组成一正交系，且

$$\int_{U_n}|a^f_{ij}(U)|^2\dot{U}=\lambda_f,$$

这里 λ_f 只依赖于 f，而不依赖于 i 与 j. 由于 $A_f(U)$ 为酉表示，即

$$A_f(U)\overline{A_f(U)'}=I^{(N(f))},$$

故

$$\int_{U_n}|a^f_{ij}(U)|^2\dot{U}=\frac{1}{(N(f))^2}\int_{U_n}\sum_i\sum_j|a^f_{ij}(U)|^2\dot{U}$$

$$=\frac{1}{(N(f))^2}\int_{U_n}\operatorname{tr}(A_f(U)\overline{A_f(U)'})\dot{U}$$

$$=\frac{1}{N(f)}\int_{U_n}\dot{U}=C/N(f_1,\cdots,f_n).$$

（C 为酉群的总体积）

于是

$$\varphi^f_{ij}(U)=\sqrt{\frac{N(f_1,\cdots,f_n)}{C}}\,a^f_{ij}(U),$$

$$f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0,\qquad i,j=1,\cdots,N(f)$$

组成一就范正交系。

我们用

$$(\det U)^l A_{f_1,\cdots,f_n}(U) = A_{f_1+l,\cdots,f_n+l}(U)$$

来扩充当 $f_n \neq 0$ 时的 A_f 的定义，于是

$$\varphi^f_{i,j}(U),\quad f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n,\quad i,j = 1,\cdots,N(f) \qquad (1.2.1)$$

仍为一正交就范系。

若 $e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}$ 为 U 的特征根，则

$$\mathrm{tr}A_f(U) = \chi_f(U) = \frac{M_f(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}.$$

由定理 1.2.2，我们有

$$(\det(I - r[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]))^{-n}$$

$$= \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0} N(f_1,\cdots,f_n)\frac{M_f(re^{i\theta_1},\cdots,re^{i\theta_n})}{D(re^{i\theta_1},\cdots,re^{i\theta_n})}$$

$$= \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0} N(f_1,\cdots,f_n)\chi_f([e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}])r^{f_1+\cdots+f_n},$$

此即

$$\frac{1}{C}(\det(I - rU\overline{V}'))^{-n}$$

$$= \frac{1}{C}\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0} N(f)\chi_f(U\overline{V}')r^{f_1+\cdots+f_n}$$

$$= \frac{1}{C}\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0} N(f)\mathrm{tr}(A_f(U)\overline{A_f(V)'})r^{f_1+\cdots+f_n}$$

$$= \frac{1}{C}\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0} N(f)\sum_{i,j} a^f_{i,j}(U)\overline{a^f_{ij}(V)}r^{f_1+\cdots+f_n}$$

$$= \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_{i,j}\varphi^f_{ij}(U)\overline{\varphi^f_{ij}(V)}r^{f_1+\cdots+f_n},$$

所以 Poisson-华核可以写为

$$\frac{1}{C}P(rU,V) = \frac{1}{C}\frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I - rU\overline{V}')|^{2n}}$$

$$= (1-r^2)^{n^2}\sum_{f,i,j}\varphi_{ij}^f(U)\varphi_{ij}^f(V)r^{f_1+\cdots+f_n}$$

$$\cdot\sum_{g,s,t}\overline{\varphi_{s,t}^g(U)}\varphi_{s,t}^g(V)r^{g_1+\cdots+g_n}.$$

而表示式 $\varphi_{ij}^f(U)\overline{\varphi_{st}^g(U)}$ 出现于群表示 $A_f\times A_g$ 之中，此可以表为 A_k 的直和，故 $\varphi_{ij}^f(U)$ $\varphi_{st}^g(U)$ 可以表成为(1.2.1)中的函数的线性式，即

$$\frac{1}{C}P(rU,V)=\sum_f\sum_{i,j}\Psi_{ij}^f(rU)\overline{\varphi_{ij}^f(V)}$$

此处 f 过所有满足

$$f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n$$

的整数．当 $r<1$ 时，上述级数是绝对且一致收敛的．

在定理 1.1.1 中，取 $u(U)=\varphi_{ij}^f(U)$，由 φ_{ij}^f 的正交性，得到

$$\lim_{r\to1}\Psi_{ij}^f(rV)=\varphi_{ij}^f(V).$$

令

$$B_f(rV)=\sqrt{\frac{C}{N(f)}}(\Psi_{ij}^f(rV))_{1\leqslant i,j\leqslant N(f)},$$

由定理 1.1.1，我们有

$$B_f(rV)=\frac{1}{C}\int_{U_n}\frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I-rU\overline{V}')|^{2n}}A_f(U)\dot{U}. \quad (1.2.2)$$

若 $W\in U_n$，在上式中 U，V 分别代以 WU，WV，则有

$$B_f(rWV)=\frac{1}{C}\int_{U_n}\frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I-rU\overline{V}')|^{2n}}\cdot A_f(WU)\dot{U}=A_f(W)B_f(rV). \quad (1.2.3)$$

同样可得

$$B_f(rVW)=B_f(rV)A_f(W).$$

取 $V=I$，就有

$$A_f(W)B_f(rI)=B_f(rI)A_f(W).$$

由 Schur 引理，即得

$$B_f(rI) = \rho^f(r) I^{(N(f))}, \tag{1.2.4}$$

及

$$\lim_{r\to 1} \rho^f(r) = 1. \tag{1.2.5}$$

将(1.2.4)代入(1.2.3)，就有

$$B_f(rV) = \rho^f(r) A_f(V). \tag{1.2.6}$$

因此，Poisson-华核有如下的展开式：

$$\frac{1}{C} P(rU, V) = \sum_f \rho^f(r) \sum_{i,j} \varphi^f_{ij}(U) \overline{\varphi^f_{ij}(V)}.$$

如果记

$$\Phi_{f_1,\cdots,f_n}(U) = (\varphi^f_{ij}(U))_{1\leqslant i,\, j\leqslant N(f)},$$

则上式可表为

$$\frac{1}{C} P(rU, V) = \sum_f \rho^f(r) \operatorname{tr}(\Phi_f(U) \overline{\Phi_f(V)'}).$$

由(1.2.2)及(1.2.6)，我们有

$$\rho^f(r) A_f(U) = \frac{1}{C} \int_{U_n} \frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I - rU\overline{V}')|^{2n}} A_f(V) \dot{V}.$$

取 $U = I$，再取迹，即得

$$\rho^f(r) N(f) = \frac{1}{C} \int_{U_n} \frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I - rV)|^{2n}} \chi_f(V) \dot{V}. \tag{1.2.7}$$

此式还可以写为

$$\rho^f(r) N(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi} \frac{(1-r^2)^{n^2}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} |1 - re^{i\theta_\nu}|^{2n}}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} e^{il_1\theta_1}, & \cdots, & e^{il_1\theta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{il_n\theta_1}, & \cdots, & e^{il_n\theta_n} \end{vmatrix} \prod_{\nu<\mu} (e^{-i\theta_\nu} - e^{-i\theta_\mu}) d\theta_1 \cdots d\theta_n. \tag{1.2.8}$$

可以直接证明

$$\rho^f(r) = \begin{cases} r^{f_1+\cdots+f_n}, & 若\ f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0, \\ r^{-f_1-\cdots-f_n}, & 若\ 0 \geqslant f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n. \end{cases}$$

§ 1.3 Abel 求和

在展开了 Poisson-华核之后，华罗庚[2]定义了在 n 阶酉群 U_n 上可积函数 $u(U)$ ($U \in U_n$) 的 Fourier 级数

$$\sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1 \cdots f_n} \Phi'_{f_1 \cdots f_n}(U)) \tag{1.3.1}$$

的 Abel 平均为

$$\sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \rho^f(r) \operatorname{tr}(C_{f_1 \cdots f_n} \Phi'_{f_1 \cdots f_n}(U)), \tag{1.3.2}$$

这里 $\rho^f(r)$为由 (1.2.7) 式所定义的函数．我们还知道，(1.3.2) 可以表为

$$\frac{1}{C} \int_{U_n} u(VU) \frac{(1 - r^2)^{n^2}}{|\det(I - r\overline{V}')|^{2n}} \dot{V}. \tag{1.3.3}$$

于是定理 1.1.1 还可以写为(华罗庚[2])

定理 1.3.1 若 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数可以 Abel 求和于它自己。

在 §1.1 中已经证明了定理 1.1.1，从而也就证明了定理 1.3.1。下面我们还将给出定理 1.3.1 的一个直接的证明，这也就给定理 1.1.1 以另一个证明。

至于 $\rho^f(r)$ 的值，已经知道

(1) $\rho^f(r) \to 1$, 当 $r \to 1$;

(2) $\rho^f(r) = \begin{cases} r^{f_1 + \cdots + f_n}, & \text{当 } f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0, \\ r^{-f_1 - \cdots - f_n}, & \text{当 } 0 \geqslant f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n, \end{cases}$

当 f 不是全非负，或全非正时，要给出 $\rho^f(r)$ 的明显表达式，就要通过很复杂的计算．下面我们给出三种形式的 $\rho^f(r)$ 的明显表达式，都可以十分容易地看出，在这三种形式的表达式中，当 f 是全非负或全非正时，就是上面的第 (2) 式．(参阅龚昇[1])

定理 1.3.2 当 $l_1 > l_2 > \cdots > l_s \geqslant 0 > l_{s+1} > \cdots > l_n$ ($n \geqslant s \geqslant 0$) 时，有

$$\rho^f(r) = r^{f_1+\cdots+f_s-f_{s+1}-\cdots-f_n} \cdot \sum_{s \geq g_{s+1} \geq \cdots \geq g_n \geq 0}$$

$$\cdot \frac{N_s(f,g)N_s(g,f)}{N(f)N(g)} r^{2(g_{s+1}+\cdots+g_n)}, \qquad (1.3.4)$$

这里 $N_s(a,b)$ 表示 $N(a_1,\cdots a_s, b_{s+1},\cdots b_n)$，$g = (g_1,\cdots,g_s)$，而 $(g_1+n-1, g_2+n-2,\cdots,g_n)$ 是 $(0,1,\cdots,n-1)$ 的一个排列。

$l_1 = f_1 + n - 1$，$l_2 = f_2 + n - 2$，$\cdots$，$l_n = f_n$，$0 \geq g_1 \geq g_2 \geq \cdots \geq g_s \geq s - n$。

$\rho^f(r)$ 还可表成以下这些形式:

定理 1.3.3 若 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是 $(0, 1, \cdots, n-1)$ 的一个排列，而 $v_1 > \cdots > v_s$，那么

$$\rho^f(r) = r^{|l_1|+\cdots+|l_n|-\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\cdot \sum_{n-1 \geq v_{s+1} > \cdots > v_n \geq 0} \prod_{j=1}^{s} \prod_{k=s+1}^{n} \frac{(l_j - v_k)(v_j - l_k)}{(v_j - v_k)(l_j - l_k)} r^{2(v_{s+1}+\cdots+v_n)}. \quad (1.3.5)$$

定理 1.3.4 如同前述定理的假设，那么

$$\rho^f(r) = r^{f_1+\cdots+f_s-l_{s+1}-\cdots-l_n} \sum_{v=0}^{s(n-s)} b_v r^{2v}, \qquad (1.3.6)$$

这里 b_v 等于

$$\sum_{\substack{n-1 \geq v_{s+1} > \cdots > v_n \geq 0 \\ v_{s+1}+\cdots+v_n = v + \frac{(n-s)(n-s-1)}{2}}} \prod_{j=1}^{s} \prod_{k=s+1}^{n} \frac{(l_j - v_k)(v_j - l_k)}{(v_j - v_k)(l_j - l_k)},$$

这也就是

$$\sum_{\substack{s \geq g_{s+1} \geq \cdots \geq g_n \geq 0 \\ g_{s+1}+\cdots+g_n = v}} \frac{N_s(f,g)N_s(g,f)}{N(f)N(g)}.$$

从这些表达式中可以明显地看到：$\rho^f(r)$ 为 $f_1 + \cdots + f_s - f_{s+1} - \cdots - f_n + 2s(n-s)$ 次多项式。当 $s = 0$ 或 $s = n$ 时，即为 (2)。还可看出

$$\rho^f(r) = r^{f_1+\cdots+f_s-f_{s+1}-\cdots-f_n} + O(1-r). \qquad (1.3.7)$$

这样我们将 Abel 求和的系数全部明确地写了出来，以下几节我们将来证明这些定理。

§1.4 Poisson 积分

已知 $u(U)$ 的 Fourier 级数 (1.3.1) 的 Abel 平均 (1.3.2) 可以表为 Poisson 积分 (1.3.3)，先来证明

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} \frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I - r\bar{V}')|^{2n}} \dot{V} = 1. \qquad (1.4.1)$$

记 $\bar{V}'$ 的特征根为 $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$，那么[1] (1.4.1) 的左边就是

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi} \cdots\cdots \int \frac{(1-r^2)^{n^2} \prod\limits_{j<k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2}{|1 - re^{i\theta_1}|^{2n} \cdots |1 - re^{i\theta_n}|^{2n}} \cdot d\theta_1 \cdots d\theta_n. \qquad (1.4.2)$$

由于 (1.4.2) 中被积函数是 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 的对称函数，所以(1.4.2) 可以写成

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)^{n^2} \prod\limits_{j<k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2}{|1 - re^{i\theta_1}|^{2n} \cdots |1 - re^{i\theta_n}|^{2n}} \cdot d\theta_1 \cdots d\theta_n. \qquad (1.4.3)$$

考虑到

$$\begin{aligned}
\prod_{j<k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 &= \prod_{j<k} (e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}) \prod_{j<k} (e^{-i\theta_j} - e^{-i\theta_k}) \\
&= \prod_{j \neq k} (e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}) \cdot \det{}^{n-1} V \\
&= \prod_{j \neq k} ((r - e^{i\theta_k}) - (r - e^{i\theta_j})) \det{}^{n-1} V; \qquad (1.4.4)
\end{aligned}$$

记 $r \cdot e^{i\theta_j} = p_j$，由于 $\prod\limits_{j \neq k} (p_k - p_j)$ 的展开式中，有一项是

$n!p_1^{n-1}\cdots p_n^{n-1}$，而别的项中至少有一个因子，例如 p_k，它的指数是大于或等于 n． 若 p_k 等于 n，那么在(1.4.3)中就有一个因子等于零：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(n-1)\theta_k}(r - e^{i\theta_k})^n d\theta_k}{|(1 - re^{i\theta_k})|^{2n}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta_k}d\theta_k}{(1 - re^{i\theta_k})^n} = 0.$$

若 p_k 大于 n，在(1.4.3)中也有一个因子等于零，所以(1.4.3)就等于

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)^{n^2}e^{i(\theta_1+\cdots+\theta_n)}d\theta_1\cdots d\theta_n}{(1-re^{i\theta_1})^n\cdots(1-re^{i\theta_n})^n(e^{i\theta_1}-r)\cdots(e^{i\theta_n}-r)},$$

而这就是

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1|=1}\frac{(1-r^2)^n d\zeta_1}{(1-r\zeta_1)^n(\zeta_1-r)}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_2|=1}\frac{(1-r^2)^n d\zeta_2}{(1-r\zeta_2)^n(\zeta_2-r)}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_n|=1}\frac{(1-r^2)^n d\zeta_n}{(1-r\zeta_n)^n(\zeta_n-r)}\right),$$

这里 $\zeta_1 = e^{i\theta_1}, \cdots, \zeta_n = e^{i\theta_n}$． 应用 Cauchy 积分定理，立得(1.4.1)。

§1.5 定理 1.3.1 的证明

从 §1.4 我们知道要证明定理 1.3.1，只要证明：当 $r \to 1$ 时，

$$\frac{1}{C}\int_{U_n}(u(VU) - u(U))\frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I - r\bar{V}')|^{2n}}\cdot\dot{V} \quad (1.5.1)$$

趋于零．记 $\bar{V}'$ 的特征根为 $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$，及

$$\varphi(\theta_1, \cdots, \theta_n) = \frac{1}{\omega'}\int_{[U_n]}(u(VU) - u(U))[\dot{V}], \quad (1.5.2)$$

这里 ω' 为 n 阶酉群旁系的体积，等于

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}n(n-1)}/(n-1)!\cdots 2!1!.$$

于是 (1.5.1) 等于

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi}\varphi(\theta_1,\cdots,\theta_n)$$

$$\cdot\frac{(1-r^2)^{n^2}\prod\limits_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2}{|1-re^{i\theta_1}|^{2n}\cdots|1-re^{i\theta_n}|^{2n}}d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{1.5.3}$$

将积分区域分解为

R_1: $\delta\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi$,

R_2: $\pi\geqslant\theta_1\geqslant\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi$,

R_3: $\pi\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\delta\geqslant\theta_3\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi$,

……………

R_n: $\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_{n-1}\geqslant\delta\geqslant\theta_n\geqslant-\pi$,

R_{n+1}: $\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant\delta$.

记在积分区域 R_j 上的积分 (1.5.3) 为 I_j, 于是 I_2 等于

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi}\varphi(\theta_1,\cdots,\theta_n)$$

$$\cdot\frac{(1-r^2)^{n^2}\prod\limits_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2}{|1-re^{i\theta_1}|^{2n}\cdots|1-re^{i\theta_n}|^{2n}}d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{1.5.4}$$

由于 $u(U)$ 在 U_n 上连续，所以 $|u(U)|$ 在 U_n 上有界. 设在 U_n 上, $|u(U)|\leqslant M$, 那么显然有

$$|\varphi(\theta_1,\cdots,\theta_n)|\leqslant 2M,$$

于是 $|I_2|$ 不大于

$$\frac{2M}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi}\frac{(1-r^2)^{n^2}\prod\limits_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2}{|1-re^{i\theta_1}|^{2n}\cdots|1-re^{i\theta_n}|^{2n}}d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{1.5.5}$$

(1.5.5) 不大于

$$\frac{2M(1-r^2)^{2n+1}}{(2\pi)^n|1-re^{i\delta}|^{2n}}\ \frac{1}{(1-r)^{2(n-1)}}$$

$$\cdot\int\cdots\int_{\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi}\frac{(1-r^2)^{(n-1)^2}\prod\limits_{2\leqslant j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2d\theta_2\cdots d\theta_n}{|1-re^{i\theta_2}|^{2(n-1)}\cdots|1-re^{i\theta_n}|^{2(n-1)}}$$

$$\cdot\int_\delta^\pi\prod_{j=2}^n|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_j}|^2d\theta_1.$$

应用 (1.4.1)，得到上式为

$$O\left(\frac{1-r}{|1-re^{i\delta}|^{2n}}\right).$$

同样可以证明

$$|I_3|=O\left(\frac{(1-r)^{2n}}{|1-re^{i\delta}|^{4n}}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|I_p|=O\left(\frac{(1-r)^{2np-4n-p^2+4p-3}}{|1-re^{i\delta}|^{2n(p-1)}}\right),$$

$p=2, 3, \cdots, n$.　显然 $2np-4n-p^2+4p-3\geqslant0$。
考虑 I_1，将 R_1 再分解成为

$$s_1:\ \delta\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta,$$

$$s_2:\ \delta\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_{n-1}\geqslant-\delta\geqslant\theta_n\geqslant-\pi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n:\ \delta\geqslant\theta_1\geqslant-\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi,$$

$$s_{n+1}:\ -\delta\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi,$$

记在积分区域 s_j 上的积分 (1.3.3) 为 J_j，可以一样证明：

$$|J_p|=O\left(\frac{(1-r)^{(p-1)^2}}{|1-re^{i\delta}|^{2n(p-1)}}\right),$$

$$p=2, 3, \cdots, n.$$

至于 J_1，由于 $u(U)$ 的连续性，已给任意小数 $\varepsilon>0$，一定能够找到 δ，使当 $\delta\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta$ 时，$|\varphi(\theta_1, \cdots, \theta_n)|$

$< \varepsilon/2$. 选取 r 充分接近于 1，使

$$|I_2| + \cdots + |I_{n+1}| + |J_2| + \cdots + |J_{n+1}| < \varepsilon/2.$$

于是，任给 $\varepsilon > 0$，一定可以找到 r 充分接近于 1，使 (1.5.1) 的绝对值小于 ε。

这就证明了定理 1.3.1. 由于典型域的可递性，证明了定理 1.3.1，也就证明了定理 1.1.1.

§1.6 系数的计算

在以后几节中，我们来证明定理 1.3.2 等.

若 $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$ 是 U 的特征根，那么 (1.3.3) 成为

$$\rho^f(r)N(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi} \cdots \int \frac{(1-r^2)^{n^2}}{\prod_{\nu=1}^{n} |1 - re^{i\theta_\nu}|^{2n}}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} e^{il_1\theta_1}, & \cdots, & e^{il_1\theta_n} \\ e^{il_2\theta_1}, & \cdots, & e^{il_2\theta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{il_n\theta_1}, & \cdots, & e^{il_n\theta_n} \end{vmatrix} \prod_{\nu<\mu} (e^{-i\theta_\nu} - e^{-i\theta_\mu}) d\theta_1 \cdots d\theta_n. \quad (1.6.1)$$

将 (1.6.1) 中被积函数的行列式展开，于是得到

$$\rho^f(r)N(f) = \sum \delta^{1,2,\cdots,n}_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi} \cdots \int$$

$$\cdot \frac{(1-r^2)^{n^2}}{\prod_{\nu=1}^{n} |1 - re^{i\theta_\nu}|^{2n}} \times e^{i(l_{\alpha_1}\theta_1 + \cdots + l_{\alpha_n}\theta_n)}$$

$$\cdot D(e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}) d\theta_1 \cdots d\theta_n. \quad (1.6.2)$$

上述积分进行变数变换，使 $l_{\alpha_1}\theta_1 + \cdots + l_{\alpha_n}\theta_n$ 变成 $l_1\theta_1 + \cdots + l_n\theta_n$，可以看出

$$\rho^f(r)N(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)^{n^2}}{\prod_{\nu=1}^{n} |1 - re^{i\theta_\nu}|^{2n}}$$

$$\cdot\, e^{i(l_1\theta_1+\cdots+l_n\theta_n)} D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})\, d\theta_1\cdots d\theta_n. \quad (1.6.3)$$

在(1.6.3)中被积函数的行列式进行展开，于是

$$\rho^f(r)N(f)=$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\sum \delta^{0,1,\cdots,n-1}_{k_0,k_1,\cdots,k_{n-1}} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)^{n^2}}{\prod_{\nu=1}^{n}|1-re^{i\theta_\nu}|^{2n}}$$

$$\cdot\, e^{i[(l_1-k_0)\theta_1+\cdots+(l_n-k_{n-1})\theta_n]} d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

而这就是

$$\rho^f(r)N(f)=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(1-r^2)^{n^2}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1n} \\ b_{21}, & b_{22}, & \cdots, & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \cdots, & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.6.3')$$

这里 $b_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l_\beta-\alpha+1)\theta}d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2n}}$ 在上面这个行列式中，将第一列乘以 $C_0^{k-1}r^0(-1)^0$，第二列乘以 $C_1^{k-1}r^1(-1)^1$，$\cdots$，第 k 列乘以 $C_{k-1}^{k-1}r^{k-1}(-1)^{k-1}$，然后开始 k 列相加到第 k 列上，$k=1,2,\cdots,n$。于是得到

$$\rho^f(r)N(f)=(1-r^2)^{n^2}r^{-\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \cdots, & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & \cdots, & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \cdots, & c_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.6.4)$$

这里

$$c_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_\beta\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^{n-\alpha+1}}.$$

事实上，还可以从(1.6.3)更直接的来证明(1.6.4)，从 $D(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的性质，我们知道

$$D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})=r^{-\frac{1}{2}n(n-1)}D(re^{-i\theta_1},\cdots,re^{-i\theta_n})$$
$$=r^{-\frac{1}{2}n(n-1)}D(re^{-i\theta_1}-1,\cdots,re^{i\theta_n}-1)$$

$$= (-r)^{-\frac{1}{2}n(n-1)} D\left(1 - re^{-i\theta_1}, \cdots, 1 - re^{-i\theta_n}\right)$$

$$= r^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{j=1}^{n} (1 - re^{-i\theta_j})^{n-1}$$

$$\cdot D\left(\frac{1}{1 - re^{-i\theta_1}}, \cdots, \frac{1}{1 - re^{-i\theta_n}}\right).$$

将此式代入 (1.6.3)，得到

$$\rho^l(r)N(f) = r^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{1}{(2\pi)^n}$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)^{n^2} e^{i(l_1\theta_1 + \cdots + l_n\theta_n)}}{\prod_{\nu=1}^{n} (1 - re^{i\theta_\nu})^n \prod_{\nu=1}^{n} (1 - re^{-i\theta_\nu})}$$

$$\cdot D\left(\frac{1}{1 - re^{-i\theta_1}}, \cdots, \frac{1}{1 - re^{-i\theta_n}}\right) d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

对被积函数中的行列式展开，即得 (1.6.4).

引入符号

$$\Lambda^{p_1, \cdots, p_n}_{q_1, \cdots, q_n} = \begin{vmatrix} d_{11}, & d_{12}, & \cdots, & d_{1n} \\ d_{21}, & d_{22}, & \cdots, & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1}, & d_{n2}, & \cdots, & d_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.6.5}$$

这里

$$d_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ip_\beta\theta} d\theta}{(1 - re^{i\theta})^{q_\beta} (1 - re^{-i\theta})^{n-\alpha+1}}.$$

于是 (1.6.4) 就是

$$\rho^l(r)N(f) = (1-r^2)^{n^2} r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \Lambda^{l_1, \cdots, l_n}_{n, \cdots, n}. \tag{1.6.6}$$

§1.7 几个代数恒等式

在这一节中假定

$$l_1 > l_2 > \cdots > l_s \geqslant 0 > l_{s+1} > \cdots > l_n \quad (n \geqslant s \geqslant 0),$$

由 (1.4.5) 的 Λ 的定义，立刻有

$$\Lambda^{l_1, \cdots, l_n}_{n, \cdots, n} = \Lambda^{l_1, \cdots, l_{n-1}, l_n}_{n, \cdots, n, n-1} + r\Lambda^{l_1, \cdots, l_{n-1}, l_n+1}_{n, \cdots, n, n}.$$

但是

$$A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n}_{n,\cdots,n,n-1} = A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n}_{n,\cdots,n,n-2} + rA^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}_{n,\cdots,n,n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n}_{n,\cdots,n,1} = A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n}_{n,\cdots,n,0} + rA^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}_{n,\cdots,n,1}.$$

将这些恒等式一起相加，考虑到当 $l_n < 0$ 时，

$$A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n}_{n,\cdots,n,0} = 0,$$

于是得到恒等式

$$A^{l_1,\cdots,l_n}_{n,\cdots,n} = r\sum_{j=0}^{n-1} A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}_{n,\cdots,n,n-j}. \qquad (1.7.1)$$

但是

$$A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}_{n,\cdots,n,n-j} = A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}_{n,\cdots,n,n-j-1} + rA^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+2}_{n,\cdots,n,n-j},$$

$$A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}_{n,\cdots,n,n-j-1} = A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}_{n,\cdots,n,n-j-2} + rA^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+2}_{n,\cdots,n,n-j-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}_{n,\cdots,n,1} = A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}_{n,\cdots,n,0} + rA^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+2}_{n,\cdots,n,1}.$$

将这此恒等式相加，由于考虑到

$$A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}_{n,\cdots,n,0} = 0,$$

所以

$$A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}_{n,\cdots,n,n-j} = r\sum_{k=j}^{n-1} A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+2}_{n,\cdots,n,n-k}.$$

以此式代入(1.7.1)，即得

$$A^{l_1,\cdots,l_n}_{n,\cdots,n} = r^2\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1} A^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+2}_{n,\cdots,n,n-k}$$

$$-r^2\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)A^{l_1,\dots,l_{n-1},l_n+2}_{n,\dots,n,n-k}.$$

继续应用上述步骤，最后可以得到

$$A^{l_1,\dots,l_n}_{n,\dots,n}=r^{-l_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)\cdots(k-l_n-1)}{(-l_n-1)!}A^{l_1,\dots,l_{n-1},0}_{n,\dots,n,n-k}$$

$$=r^{-l_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k-l_n-1)!}{k!(-l_n-1)!}A^{l_1,\dots,l_{n-1},0}_{n,\dots,n,n-k}. \tag{1.7.2}$$

注意到 $l_1>\cdots>l_s\geqslant 0>l_{s+1}>\cdots>l_n$，在(1.7.2)的右边，再对 l_{n-1} 进行上述步骤，使之递加到0，…，一直到对 l_{s+1} 进行上述步骤，使之递加到0，最后得到

$$A^{l_1,\dots,l_n}_{n,\dots,n}=r^{-l_{s+1}-\cdots-l_n}\sum_{k_{s+1}=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{n-1}\frac{(k_{s+1}-l_{s+1}-1)!}{k_{s+1}!(-l_{s+1}-1)!}$$

$$\cdot\cdots\frac{(k_n-l_n-1)!}{k_n!(-l_n-1)!}\cdot A^{l_1,\dots,l_s,0,\dots,0}_{n,\dots,n,n-k_{s+1},\dots,n-k_n}. \tag{1.7.3}$$

§1.8 A 的值

计算 $\varphi^l(r)$的值，由(1.6.6)，只要对 $A^{l_1,\dots,l_n}_{n,\dots,n}$ 进行计算即可，而 $A^{l_1,\dots,l_n}_{n,\dots,n}$ 根据(1.7.3)知道，只要求出 $A^{l_1,\dots,l_s,0,\dots,0}_{n,\dots,n,n-k_{s+1},\dots,n-k_n}$ 就可以了。但是 $A^{l_1,\dots,l_s,0,\dots,0}_{n,\dots,n,n-k_{s+1},\dots,n-k_n}$ 等于

$\det(h_{fg})_{1\le f,g\le n}$，

这里
$$h_{fg}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_g\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^{(n-f+1)}},$$

当 $g=1,2,\cdots,s$ 时

$$h_{fg}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n-k_{g+1}}(1-e^{-i\theta})^{(n-f+1)}},$$

当 $g=s+1,\cdots,n$ 时

(1.8.1)

为了计算上述行列式，先证明

引理 1.8.1 若 $p \geqslant 0$，$q > 0$，$m > 0$ $1 > r > 0$，那么

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ip\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^q(1-re^{-i\theta})^m} = \frac{r^{-p}}{(m-1)!}$$

$$\cdot \left[\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left(t^{m+p-1}(1-t)^{-q}\right)\right]_{t=r^2} \tag{1.8.2}$$

成立.

证 因为 $1 > r > 0$，所以

$$(1-re^{-i\theta})^{-q} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q+k-1)!\,r^k e^{ik\theta}}{(q-1)!\,k!},$$

$$(1-re^{-i\theta})^{-m} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(m+l-1)!\,r^l e^{-il\theta}}{(m-1)!\,l!},$$

于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ip\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^q(1-re^{-i\theta})^m}$$

$$= \sum_{\substack{l-k=p \\ l\geqslant 0,\ k\geqslant 0}} \frac{(q+k-1)!\,(m+l-1)!}{(m-1)!\,l!\,(q-1)!\,k!} r^{k+l}$$

$$= r^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q+k-1)!\,(m+k+p-1)!}{(m-1)!\,(k+p)!\,(q-1)!\,k!} r^{2k}.$$

考虑 $(1-t)^{-q}$ 的展开式，容易证明

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q+k-1)!\,(m+k+p-1)!}{(m-1)!\,(k+p)!\,(q-1)!\,k!} t^k$$

$$= \frac{t^{-p}}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left(t^{m+p-1}(1-t)^{-q}\right),$$

此即 (1.8.2).

将 (1.8.2) 的值代人 (1.8.1) 就得到 $A^{l_1,\cdots,l_s,0,\cdots,0}_{n,\cdots,n,n-k_{s+1},\cdots,n-k_n}$ 等于

$$\frac{r^{-l_1-\cdots-l_s}}{(n-1)!\cdots 2!\,1!} \begin{vmatrix} e_{11}, & e_{12}, & \cdots, & e_{1n} \\ e_{21}, & e_{22}, & \cdots, & e_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n1}, & e_{n2}, & \cdots, & e_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.8.3}$$

这里

$$e_{ij}=\frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}}(t^{n+l_j-j}(1-t)^{-n}),$$

当 $j\leqslant s$；

$$e_{ij}=\frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}}\times(t^{n-j}(1-t)^{-n+k_j}),$$

当 $s+1\leqslant j\leqslant n$。但是

$$\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}(t^{n+l-j}(1-t)^{-n})=\sum_{k=0}^{n-j}C_k^{n-j}(t^{n-j})^{(k)}(t^{l}(1-t)^{-n})^{(n-j-k)},$$

$$\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}(t^{n-j}(1-t)^{-n+\nu})=\sum_{k=0}^{n-j}C_k^{n-j}(t^{n-j})^{(k)}((1-t)^{-n+\nu})^{(n-j-k)},$$

代入 (1.8.3) 立刻证得 $(t=r^2)$：$A^{l_1,\cdots,l_s,0,\cdots,0}_{n,\cdots,n,n-k_{s+1},\cdots,n-k_n}$ 等于

$$\frac{r^{-l_1-\cdots-l_s+n(n-1)}}{(n-1)!\cdots2!1!}\begin{vmatrix}f_{11}, & f_{12}, & \cdots, & f_{1n}\\ f_{21}, & f_{22}, & \cdots, & f_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1}, & f_{n2}, & \cdots, & f_{nn}\end{vmatrix},$$

这里

$$f_{ij}=\frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}}(t^{l_j}(1-t)^{-n}),$$

当 $j\leqslant s$；

$$f_{ij}=\frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}}((1-t)^{-n+k_j}),$$

当 $s+1\leqslant j\leqslant n$。 应用华罗庚的一条定理(华罗庚[1]，定理 1.2.4) 可以知道上式等于

$$r^{-l_1-\cdots-l_s+n(n-1)}\cdot$$

$$\cdot\lim_{t_1\to t,\cdots,t_n\to t}\begin{vmatrix}t_1^{l_1}(1-t_1)^{-n},\cdots,t_1^{l_s}(1-t_1)^{-n}, & (1-t_1)^{-n+k_{s+1}}, & \cdots, & (1-t_1)^{-n+k_n}\\ t_2^{l_1}(1-t_2)^{-n},\cdots,t_2^{l_s}(1-t_2)^{-n}, & (1-t_2)^{-n+k_{s+1}}, & \cdots, & (1-t_2)^{-n+k_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ t_n^{l_1}(1-t_n)^{-n},\cdots,t_n^{l_s}(1-t_n)^{-n}, & (1-t_n)^{-n+k_{s+1}}, & \cdots, & (1-t_n)^{-n+k_n}\end{vmatrix}$$

$$\cdot\frac{1}{D(t_1,\cdots,t_n)}=r^{-l_1-\cdots-l_s+n(n-1)}(1-t)^{-n^2}$$

$$
\cdot \lim_{t_1\to\cdots\to t_n\to t}\begin{vmatrix} t_1^{l_1}, & \cdots, & t_1^{l_s}, & (1-t_1)^{k_{s+1}}, & \cdots, & (1-t_1)^{k_n} \\ t_2^{l_1}, & \cdots, & t_2^{l_s}, & (1-t_2)^{k_{s+1}}, & \cdots, & (1-t_2)^{k_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_n^{l_1}, & \cdots, & t_n^{l_s}, & (1-t_n)^{k_{s+1}}, & \cdots, & (1-t_n)^{k_n} \end{vmatrix}
$$

$$
\cdot \frac{1}{D(t_1,\cdots,t_n)}. \tag{1.8.4}
$$

以 (1.8.4) 代入 (1.7.3)，注意到

$$
g_p(t) = \frac{1}{(-p-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k-p-1)!}{k!}
$$

$$
\cdot (1-t)^k = \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu^p t^\nu,
$$

而

$$
p<0,\ A_\nu^p = \frac{(-1)^\nu (n-p-1)!}{(\nu-p)\nu!(-p-1)!(n-\nu-1)!}. \tag{1.8.5}
$$

我们有

$$
A_{n,\cdots,n}^{l_1,\cdots,l_n} = r^{-l_1-\cdots-l_n+n(n-1)}(1-r^2)^{-n^2}
$$

$$
\cdot \lim_{t_1\to\cdots\to t_n\to t}\begin{vmatrix} t_1^{l_1}, & \cdots, & t_1^{l_s}, & g_{l_{s+1}}(t_1), & \cdots, & g_{l_n}(t_1) \\ t_2^{l_1}, & \cdots, & t_2^{l_s}, & g_{l_{s+1}}(t_2), & \cdots, & g_{l_n}(t_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_n^{l_1}, & \cdots, & t_n^{l_s}, & g_{l_{s+1}}(t_n), & \cdots, & g_{l_n}(t_n) \end{vmatrix}
$$

$$
\cdot \frac{1}{D(t_1,\cdots,t_n)}. \tag{1.8.6}
$$

现在证明 (1.8.5)，首先注意到一个代数恒等式

$$
\sum_{r=0}^{s}\frac{(r+l)!}{r!} = \frac{(s+l+1)!}{(l+1)\cdot s!}, \tag{1.8.7}
$$

这里 s, l 都是正整数.

证 显然

$$
\sum_{r=0}^{s}\frac{(r+l+1)!}{r!}
$$

$$= \sum_{r=1}^{s} \frac{(r+l)!}{(r-1)!} + (l+1) \cdot \sum_{r=0}^{s} \frac{(r+l)!}{r!}$$

$$= \sum_{r=0}^{s-1} \frac{(r+l+1)!}{r!} + (l+1) \cdot \sum_{r=0}^{s} \frac{(r+l)!}{r!}.$$

立得 (1.8.7)

于是

$$g_p(t) = \frac{1}{(-p-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k-p-1)!}{k!} (1-t)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k-p-1)!}{k!(-p-1)!} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{k!(-t)^\nu}{(k-\nu)!\nu!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(k-p-1)!(-t)^\nu}{(-p-1)!(k-\nu)!\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{k=\nu}^{n-1} \frac{(k-p-1)!(-t)^\nu}{(-p-1)!(k-\nu)!\nu!},$$

所以

$$A_\nu^p = \sum_{k=\nu}^{n-1} \frac{(k-p-1)!(-1)^\nu}{(-p-1)!(k-\nu)!\nu!}$$

$$= \frac{(-1)^\nu}{\nu!(-p-1)!} \sum_{r=0}^{n-\nu-1} \frac{(r+\nu-p-1)!}{r!}.$$

在 (1.8.7) 中取 $s = n-\nu-1$，$l = \nu-p-1$，于是得到

$$A_\nu^p = \frac{(-1)^\nu (n-p-1)!}{\nu!(-p-1)!(n-\nu-1)!(\nu-p)},$$

而这就是 (1.8.5). 由华罗庚[1]中的定理，我们知道 (1.8.6) 就是

$$A_{n,\cdots,n}^{l_1,\cdots,l_n} = \frac{r^{-l_1-\cdots-l_n+n(n-1)}(1-r^2)^{-n^2}}{(n-1)!\cdots 2!1!}$$

$$
\cdot\begin{vmatrix}
\frac{d^{n-1}t^{l_1}}{dt^{n-1}}, & \cdots, & \frac{d^{n-1}t^{l_s}}{dt^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}g_{l_{s+1}}(t)}{dt^{n-1}}, & \cdots, & \frac{d^{n-1}g_{l_n}(t)}{dt^{n-1}} \\
\frac{d^{n-2}t^{l_1}}{dt^{n-2}}, & \cdots, & \frac{d^{n-2}t^{l_s}}{dt^{n-2}}, & \frac{d^{n-2}g_{l_{s+1}}(t)}{dt^{n-2}}, & \cdots, & \frac{d^{n-2}g_{l_n}(t)}{dt^{n-2}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
t^{l_1}, & \cdots, & t^{l_s}, & g_{l_{s+1}}(t), & \cdots, & g_{l_n}(t)
\end{vmatrix}. \tag{1.8.8}
$$

§1.9 §1.3 中的定理的证明

将 (1.8.8) 的值代入 (1.6.6)，于是就得到

$$
\rho^l(r)N(f)=\frac{r^{-l_1-\cdots-l_n+\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!\cdots 2!1!}
$$

$$
\cdot\sum_{\nu_{s+1}=0}^{n-1}\cdots\sum_{\nu_n=0}^{n-1}A_{\nu_{s+1}}^{l_{s+1}}\cdots A_{\nu_n}^{l_n}\cdot\begin{vmatrix}
g_{11}, & g_{12}, & \cdots, & g_{1n} \\
g_{21}, & g_{22}, & \cdots, & g_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
g_{n1}, & g_{n2}, & \cdots, & g_{nn}
\end{vmatrix}. \tag{1.9.1}
$$

这里 $g_{ij}=\frac{d^{n-i}t^{l_j}}{dt^{n-i}}$，当 $j\leqslant s$；$g_{ij}=\frac{d^{n-i}t^{\nu_j}}{dt^{n-i}}$ 当 $s+1\leqslant j\leqslant n$.

从 (1.9.1) 可以看出

$$
\rho^l(r)N(f)=\frac{r^{-l_1-\cdots-l_n+\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!\cdots 2!1!}
$$

$$
\cdot\sum_{n-1\geqslant\nu_{s+1}>\cdots>\nu_n\geqslant 0}B_{\nu_{s+1},\cdots,\nu_n}^{l_{s+1},\cdots,l_n}\begin{vmatrix}
g_{11}, & \cdots, & g_{1n} \\
g_{21}, & \cdots, & g_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
g_{n1}, & \cdots, & g_{nn}
\end{vmatrix}, \tag{1.9.2}
$$

这里

$$
B_{\nu_{s+1},\cdots,\nu_n}^{l_{s+1},\cdots,l_n}=\det\left(A_{\nu_{s+k}}^{l_{s+j}}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n-s}
$$

$$
=\frac{(-1)^{\nu_{s+1}+\cdots+\nu_n}}{\nu_{s+1}!\cdots\nu_n!}\cdot\frac{(n-l_{s+1}-1)!}{(-l_{s+1}-1)!(n-\nu_{s+1}-1)!}
$$

$$\cdot \frac{(n-l_n-1)!}{(-l_n-1)!(n-\nu_n-1)!}\det\left(\frac{1}{\nu_{s+k}-l_{s+j}}\right),$$

$$1\leqslant j,k\leqslant n-s.$$

由华罗庚[1]中的定理 1.1.3，得到 $B^{l_{s+1},\cdots,l_n}_{\nu_{s+1},\cdots,\nu_n}$ 等于

$$\frac{(-1)^{\nu_{s+1}+\cdots+\nu_n}(n-l_{s+1}-1)!\cdots(n-l_n-1)!}{\nu_{s+1}!\cdots\nu_n!(-l_{s+1}-1)!\cdots(-l_n-1)!}$$

$$\cdot\frac{D(\nu_{s+1},\cdots,\nu_n)\cdot D(-l_{s+1},\cdots,-l_n)}{(n-\nu_{s+1}-1)!\cdots(n-\nu_n-1)!\prod_{i=1}^{n-s}\prod_{j=1}^{n-s}(\nu_{s+i}-\nu_{s+j})}$$

$$=(-1)^{\nu_{s+1}+\cdots+\nu_n}\frac{(n-l_{s+1}-1)!}{(-l_{s+1}-1)!n!}n!$$

$$\cdot\frac{(n-1)!}{\nu_{s+1}!(n-\nu_{s+1}-1)!}\frac{1}{(n-1)!}\cdots$$

$$\cdot\frac{(n-l_n-1)!}{(-l_n-1)!n!}n!\frac{(n-1)!}{\nu_n!(n-\nu_n-1)!}$$

$$\cdot\frac{1}{(n-1)!}\frac{D(\nu_{s+1},\cdots,\nu_n)D(-l_{s+1},\cdots,-l_n)}{\prod_{j=s+1}^{n}\prod_{k=s+1}^{n}(\nu_j-l_k)}$$

$$=(-1)^{\nu_{s+1}+\cdots+\nu_n}\cdot n^{n-s}\prod_{j=s+1}^{n}C_n^{n-l_j-1}C_{\nu_j}^{n-1}$$

$$\cdot\frac{D(\nu_{s+1},\cdots,\nu_n)D(-l_{s+1},\cdots-l_n)}{\prod_{j=s+1}^{n}\prod_{k=s+1}^{n}(\nu_j-l_k)}. \tag{1.9.3}$$

另一方面由于

$$\begin{vmatrix} g_{11}, & g_{12}, & \cdots, & g_{1n} \\ g_{21}, & g_{22}, & \cdots, & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1}, & g_{n2}, & \cdots, & g_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \lim_{t_1 \to t, \cdots, t_n \to t} \begin{vmatrix} t_1^{l_1}, & \cdots, & t_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^{l_s}, & \cdots, & t_n^{l_s} \\ t_1^{\nu_{s+1}}, & \cdots, & t_n^{\nu_{s+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^{\nu_n}, & \cdots, & t_n^{\nu_n} \end{vmatrix} \Big/ D(t_1, \cdots, t_n)
$$

$$
= t^{l_1 + \cdots + l_s + \nu_{s+1} + \cdots + \nu_n - \frac{1}{2} n(n-1)}
$$

$$
\cdot N(f_1, \cdots, f_s, \nu_{s+1} + s + 1 - n, \cdots \nu_n), \quad (1.9.4)
$$

将(1.9.4)代入(1.9.2)，即得

$$
\rho^f(r) N(f) = r^{|l_1| + \cdots + |l_n| - \frac{n(n-1)}{2}} \sum_{n-1 \geqslant \nu_{s+1} > \cdots > \nu_n \geqslant 0} B^{l_{s+1}, \cdots, l_n}_{\nu_{s+1}, \cdots, \nu_n}
$$

$$
\cdot N(f_1, \cdots, f_s, \nu_{s+1} + s + 1 - n, \cdots, \nu_n)
$$

$$
\cdot r^{2(\nu_{s+1} + \cdots + \nu_n)}. \quad (1.9.5)
$$

注意到二个重要而显然的代数恒等式

$$
C_n^{n - l_k - 1} = \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n} (\nu_j - l_k),
$$

及

$$
\nu_k!(n - \nu_k - 1)! = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (\nu_j - \nu_k)(-1)^{\nu_k}.
$$

以此代入(1.9.3)得到 $B^{l_{s+1}, \cdots, l_n}_{\nu_{s+1}, \cdots, \nu_n}$ 等于

$$
(-1)^{\nu_{s+1} + \cdots + \nu_n} \cdot \prod_{k=s+1}^{n} \Big[\frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n} (\nu_j - l_k)(n-1)! \Big/ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (\nu_j - \nu_k)(-1)^{\nu_k} \Big]
$$

$$
\cdot \frac{D(-l_{s+1}, \cdots, -l_n) \cdot D(\nu_{s+1}, \cdots, \nu_n)}{\prod_{j=s+1}^{n} \prod_{k=s+1}^{n} (\nu_j - l_k)}
$$

$$= \frac{D(-l_{s+1},\cdots,-l_n)\cdot D(v_{s+1},\cdots,v_n)\prod_{k=s+1}^{n}\prod_{j=1}^{s}(v_j-l_k)}{\prod_{k=s+1}^{n}\prod_{j=1}^{s}(v_j-v_k)D(v_{s+1},\cdots,v_n)}$$

$$= \frac{D(v_1,\cdots,v_s,l_{s+1},\cdots,l_n)}{D(v_1,\cdots,v_s,v_{s+1},\cdots,v_n)}, \qquad (1.9.6)$$

这里 $v_1>v_2>\cdots>v_s$，而 $(v_1,\cdots,v_n)$ 是 $(0,1,\cdots,n-1)$ 的一个排列. 从 (1.9.6) 及注意到

$$N(\mu_1,\cdots,\mu_n)=\frac{D(\mu_1+n-1,\mu_2+n-2,\cdots,\mu_{n-1}+1,\mu_n)}{D(n-1,n-2,\cdots,1,0)},$$

立即得到定理 1.3.2 . 按照 $N(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ 的定义及

$$D(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{j<k}(x_j-x_k)$$

的定义，经过化简，就可以得到定理 1.3.3。将定理 1.3.2 及 1.3.3 中指数相同项归并即得定理 1.3.4。

作为定理 1.3.1 及 1.3.2 的推论，有如下的代数恒等式：

设 $n\geqslant s\geqslant 0$，$f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n$，$l_j=f_j+n-j$，$j=1,2,\cdots,n$ 那么

$$\sum_{s\geqslant g_{s+1}\geqslant\cdots\geqslant g_n\geqslant 0}\frac{N_s(f,g)N_s(g,f)}{N(f)N(g)}=1, \qquad (1.9.7)$$

这里 $g=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，$(g_1+n-1,g_2+n-2,\cdots,g_n)$ 是 $(0,1,\cdots,n-1)$ 的一个排列，$0\geqslant g_1\geqslant g_2\geqslant\cdots\geqslant g_s\geqslant s-n$.

$$\sum_{n-1\geqslant v_{s+1}>\cdots>v_n\geqslant 0}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=s+1}^{n}\frac{(l_j-v_k)(v_j-l_k)}{(v_j-v_k)(l_j-l_k)}=1, \qquad (1.9.8)$$

这里 $(v_1,\cdots,v_n)$ 是 $(0,1,\cdots,n-1)$ 的一个排列，而 $v_1>\cdots>v_s$.

当然 (1.9.7) 与 (1.9.8) 是二个有趣的恒等式.

可以验证 §1,3 中的 $\rho^f(r)$ 的性质(2)是满足的。

从 (1.9.7) 及 (1.9.8) 就立刻得到 (1.3.7)。

从(1.3.7)出发，可以很容易得到一条 Tauber 型收敛定理，不过这里就不叙述与论证它了.

§1.10 一类积分行列式

1959 年作者计算出了 $\rho'(r)$ 以后，1973 年钟家庆利用一类积分行列式得到了另一个简化的证明. 利用这类积分行列式，他还得到了一些群表示论的结果. (详细参阅钟家庆[1])

设 Γ 是复平面上的一条简单闭曲线，$f_i(z)$，$g_j(z)$ $(i, j=1, 2,\cdots,n)$ 是在 Γ 内及 Γ 上解析的函数，$A(z)$ 是 z 的 $m(m\geqslant n)$ 次多项式，其零点全部在 Γ 内，定义行列式：

$$L(A;f_1,\cdots,f_n;g_1,\cdots,g_n)=\det\cdot\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_i(z)g_j(z)}{A(z)}dz\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}. \tag{1.10.1}$$

定理 1.10.1 设 $A(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$，诸 z_k 是全部在 Γ 内的彼此不同的零点，那么

$$L(A;f_1,\cdots,f_n;g_1,\cdots,g_n)=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\prod_{i<j}(z_i-z_j)^2}\cdot\begin{vmatrix}f_1(z_1), & \cdots, & f_1(z_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_n(z_1), & \cdots, & f_n(z_n)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}g_1(z_1), & \cdots, & g_1(z_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ g_n(z_1), & \cdots, & g_n(z_n)\end{vmatrix}. \tag{1.10.2}$$

证 由于这些 z_k 彼此不等，利用 Cauchy 公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_i(z)g_j(z)}{\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)}dz=\sum_{k=1}^{n}\frac{f_i(z_k)g_j(z_k)}{\prod_{l\neq k}(z_k-z_l)},$$

故

$$\det\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_i(z)g_j(z)}{A(z)}dz\right)=\det\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f_i(z_k)g_j(z_k)}{\prod_{l\neq k}(z_k-z_l)}\right),$$

$$
=\begin{vmatrix} f_1(z_1), & \cdots, & f_1(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(z_1), & \cdots, & f_n(z_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{g_1(z_1)}{\prod\limits_{l\neq 1}(z_1-z_l)}, & \cdots, & \dfrac{g_n(z_1)}{\prod\limits_{l\neq 1}(z_1-z_l)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{g_1(z_n)}{\prod\limits_{l\neq n}(z_n-z_l)}, & \cdots, & \dfrac{g_n(z_n)}{\prod\limits_{l\neq n}(z_n-z_l)} \end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{\prod\limits_{l\neq 1}(z_1-z_l)\prod\limits_{l\neq 2}(z_2-z_l)\cdots\prod\limits_{l\neq n}(z_n-z_l)}
$$

$$
\cdot\begin{vmatrix} f_1(z_1), & \cdots, & f_1(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(z_1), & \cdots, & f_n(z_n) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g_1(z_1), & \cdots, & g_1(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n(z_1), & \cdots, & g_n(z_n) \end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\prod\limits_{i<j}(z_i-z_j)}\begin{vmatrix} f_1(z_1), & \cdots, & f_1(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(z_1), & \cdots, & f_n(z_n) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g_1(z_1), & \cdots, & g_1(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n(z_1), & \cdots, & g_n(z_n) \end{vmatrix}.
$$

系 1.10.1 取 $g_1(x)=1, g_2(x)=x, \cdots, g_n(x)=x^{n-1}$，这时 $\det(g_i(z_j))$ 与 Vandermonde 行列式 $D(z_1,\cdots,z_n)$ 只差一个符号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，此时

$$
\begin{aligned}
&L(A;f_1,\cdots,f_n;1,x,\cdots,x^{n-1}) \\
&=\frac{1}{\prod\limits_{i<j}(z_i-z_j)}\begin{vmatrix} f_1(z_1), & \cdots, & f_1(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(z_1), & \cdots, & f_n(z_n) \end{vmatrix}. \qquad (1.10.3)
\end{aligned}
$$

如取 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为多项式、那么 $L(A;f_1,\cdots,f_n;1,x,\cdots,x^{n-1})$ 就是 Reiko Sakamoto [1] 所定义的 Лопатинский 行列式。因此，(1.10.1) 是 Лопатинский 行列式的推广。

如在 (1.10.3) 中取 $f_i(x)=x^{m_i+n-i}(i=1,\cdots,n)m_1\geqslant\cdots\geqslant m_n\geqslant 0$，那么

$$
L(A;x^{m_1},\cdots x^{m_n},1,\cdots,x^{n-1})=\frac{1}{\prod\limits_{i<j}(z_i-z_j)}
$$

$$\cdot\begin{vmatrix} z_1^{m_1+n-1}, & \cdots, & z_n^{m_1+n-1} \\ z_1^{m_2+n-2}, & \cdots, & z_n^{m_2+n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^{m_n}, & \cdots, & z_n^{m_n} \end{vmatrix} = \chi_{(m_1,\cdots,m_n)}(z_1,\cdots,z_n),$$

这里 $\chi_{(m_1,\cdots,m_n)}(z_1,\cdots,z_n)$ 是完全线性群的以 $(m_1,\cdots,m_n)$ 为标签的既约表示的特征. 因此行列式(1.10.1)也可以看作是完全线性群既约表示特征的推广.

定理 1.10.2 设 $A(z)=(z-a)^n$, a 在 Γ 内, 则

$$L(A;f_1,\cdots,f_n;g_1,\cdots,g_n)=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1!2!\cdots(n-1)!)^2}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} f_1(a), & \cdots, & f_n(a) \\ f_1'(a), & \cdots, & f_n'(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(a), & \cdots, & f_n^{(n-1)}(a) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g_1(a), & \cdots, & g_n(a) \\ g_1'(a), & \cdots, & g_n'(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1^{(n-1)}(a), & \cdots, & g^{(n-1)}(a) \end{vmatrix}. \tag{1.10.4}$$

证 利用 Cauchy 公式和 Leibnitz 公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_i(z)g_j(z)}{(z-a)^n}dz=\frac{1}{(n-1)!}[f_i(z)g_j(z)]_{z=a}^{(n-1)}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k f_i^{(k)}(a)g_j^{(n-1-k)}(a),$$

因此,

$$L(A;f_1,\cdots f_n;g_1,\cdots,g_n)$$

$$=\det\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_i(z)g_j(z)}{(z-a)^n}dz\right)$$

$$=\left[\frac{1}{(n-1)!}\right]^n\det\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_k^{n-1}f_i^{(k)}(a)g_j^{(n-1-k)}(a)\right)$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[\frac{1}{(n-1)!}\right]^n C_0^{n-1}\cdots C_{n-1}^{n-1}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} f_1(a), & f_1'(a), & \cdots, & f_1^{(n-1)}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a), & f_n'(a), & \cdots, & f_n^{(n-1)}(a) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g_1(a), & \cdots, & g_n(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1^{(n-1)}(a), & \cdots, & g_n^{(n-1)}(a) \end{vmatrix},$$

此即 (1.10.4).

假定 $l_1 > l_2 > \cdots > l_k \geqslant 0 > l_{k+1} > \cdots > l_n$, 令 $l_{k+1} = -m_1, \cdots, l_n = -m_{n-k}$, 则 $m_{n-k} > \cdots > m_1 > 0$. 下面讨论这种形式的积分.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \frac{\tau^j d\tau}{\tau^m(1-r\tau)^n(\tau-r)^n},$$

$$m > 0, 0 \leqslant j \leqslant n-1. \quad (1.10.5)$$

(也就是 (1.8.2) 的一个特殊情形) 显然有

引理 1.10.1 如整数 $p \leqslant n-2$, 则 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \frac{\tau^p}{(\tau-r)^n} d\tau = 0$.

引理 1.10.2 对于正整数 $m > 0, n-1 \geqslant j \geqslant 0$, 存在次数不高于 $n-1$ 的多项式 $p_m(x)$, 满足

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \frac{\tau^j d\tau}{\tau^m(1-r\tau)^n(\tau-r)^n} = \frac{r^m}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \frac{p_m(r\tau)\tau^j d\tau}{(1-r\tau)^n(\tau-r)^n}, \quad (1.10.6)$$

其中 $p_m(x)$ 由下式定义:

$$p_m(x) = \frac{1-(1-x)^n(a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1})}{x^m}, \quad (1.10.7)$$

而 $a_k = C_k^{n+k-1} = \frac{(n+k-1)\cdots n}{k!}$.

证 首先验证 $p_m(x)$ 是次数不高于 $n-1$ 的多项式. 由

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots,$$

故

$$(1-x)^{-n} - (a_0 + a_1x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1})$$
$$= a_mx^m + \cdots + 1 - (1-x)^n(a_0 + a_1x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1})$$
$$= (1-x)^n(a_mx^m + \cdots).$$

可见左端次数 $\geqslant m$，因而能被 x^m 整除；同时因左端最高次数为 $n+m-1$，所以整除结果即 $p_m(x)$ 的次数 $\leqslant n-1$。下面证(1.10.6)。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\tau^j d\tau}{\tau^m(\tau-r)^n(1-r\tau)^n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\tau^j}{(\tau-r)^n\tau^m}$$

$$\cdot\left[\sum_{i=0}^{m-1}a_i r^i\tau^i+\frac{1}{(1-r\tau)^n}-\sum_{i=0}^{m-1}a_i r^i\tau^i\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\tau^{j-m}}{(\tau-r)^n}\cdot\sum_{i=0}^{m-1}a_i r^i\tau^i d\tau$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\tau^j}{(\tau-r)^n(1-r\tau)^n}\;\frac{1-(1-r\tau)^n\sum\limits_{i=0}^{m-1}a_i r^i\tau^i}{\tau^m}d\tau,$$

注意到 $j-m+i\leqslant n-1+m-1-m=n-2$，由引理 1.10.1，前面的和号项为 0，而后面的积分即

$$\frac{r^m}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{p_m(r\tau)\tau^j}{(1-r\tau)^n(\tau-r)^n}d\tau.$$

引理 1.10.3 引理 1.10.2 中多项式 $p_m(x)$ 为：

$$p_m(x)=\sum_{s=0}^{n-1}b_m^s x^s,$$

$$b_m^s=(-1)^s\frac{(n+m-1)\cdots(n-s)}{s!(m-1)!(m+s)!}. \quad (1.10.8)$$

证 由

$$p_{m+1}(x)=\frac{1-(1-x)^n(a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1}+a_m x^m)}{x^{m+1}},$$

得

$$xp_{m+1}(x)=\frac{1-(1-x)^n(a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1})}{x^m}$$

$$+a_m(1-x)^n=p_m(x)+a_m(1-x)^n.$$

由以上递推公式，再利用 $a_k=C_k^{n+k-1}$，由数学归纳法容易验证(1.10.8)是正确的。

现在回到 (1.6.4)，及由引理 1.10.2，可有 $\rho^l(r)N(f)$ 等于

$$(1-r^2)^{n^2}\begin{vmatrix}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\tau^{l_1}d\tau}{(1-r\tau)^n(\tau-r)^n}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\tau^{l_1+n-1}d\tau}{(1-r\tau)^n(\tau-r)^n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\tau^{l_k}d\tau}{(1-r\tau)^n(\tau-r)^n}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\tau^{l_k+n-1}d\tau}{(1-r\tau)^n(\tau-r)^n}\\ \frac{r^{m_1}}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{p_{m_1}(r\tau)d\tau}{(1-r\tau)^n(\tau-r)^n}, & \cdots, & \frac{r^{m_1}}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{p_{m_1}(r\tau)\tau^{n-1}d\tau}{(1-r\tau)^n(\tau-r)^n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{r^{m_{n-k}}}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{p_{m_{n-k}}(r\tau)d\tau}{(1-r\tau)^n(\tau-r)^n}, & \cdots, & \frac{r^{m_{n-k}}}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{p_{m_{n-k}}(r\tau)\tau^{n-1}d\tau}{(1-r\tau)^n(\tau-r)^n}\end{vmatrix}$$

$$=(1-r^2)^{n^2}r^{m_1+\cdots+m_{n-k}}L\Big((\tau-r)^n;\ \tau^{l_1},\cdots,\tau^{l_k},p_{m_1}(r\tau),\cdots,p_{m_{n-k}}(r\tau);\ \frac{1}{(1-r\tau)^n},\cdots,\frac{\tau^{n-1}}{(1-r\tau)^n}\Big),$$

这里 $l_1>l_2>\cdots>l_k\geqslant 0>l_{k+1}>\cdots>l_n$。由定理 1.10.2 得到 $\rho^l(r)N(f)$ 等于

$$(1-r^2)^{n^2}\cdot r^{-(l_{k+1}+\cdots+l_n)}\cdot\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[1!2!\cdots(n-1)!]^2}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\tau^{l_1}, & \cdots, & \tau^{l_k}, & p_{m_1}(r\tau), & \cdots, & p_{m_{n-k}}(r\tau)\\ (\tau^{l_1})', & \cdots, & (\tau^{l_k})', & p'_{m_1}(r\tau), & \cdots, & p'_{m_{n-k}}(r\tau)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\tau^{l_1})^{(n-1)}, & \cdots, & (\tau^{l_k})^{(n-1)}, & p^{(n-1)}_{m_1}(r\tau), & \cdots, & p^{(n-1)}_{m_{n-k}}(r\tau)\end{vmatrix}_{\tau=r}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\frac{1}{(1-r\tau)^n}, & \cdots, & \frac{\tau^{n-1}}{(1-r\tau)^n}\\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ \left[\frac{1}{(1-r\tau)^n}\right]^{(n-1)}, & \cdots, & \left[\frac{\tau^{n-1}}{(1-r\tau)^n}\right]^{(n-1)}\end{vmatrix}_{\tau=r}.$$

为了计算这两个行列式，我们注意有

引理 1.10.4

$$\begin{vmatrix}hg_1, & \cdots, & hg_n\\ (hg_1)', & \cdots, & (hg_n)'\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (hg_1)^{(n-1)}, & \cdots, & (hg_n)^{(n-1)}\end{vmatrix}=h^n\begin{vmatrix}g_1, & \cdots, & g_n\\ g'_1, & \cdots, & g'_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ g_1^{(n-1)}, & \cdots, & g_n^{(n-1)}\end{vmatrix}.$$

证 例如第二行 $= ((hg_1)', \cdots, (hg_n)') = (\cdots, hg_i' + h'g_i, \cdots) = (hg_1', \cdots, hg_n') + (\bmod$ 第一行).

其他各行情况类似.

利用这个引理有

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(1-r\tau)^n}, & \cdots, & \frac{\tau^{n-1}}{(1-r\tau)^n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \left[\frac{1}{(1-r\tau)^n}\right]^{(n-1)}, & \cdots, & \left[\frac{\tau^{n-1}}{(1-r\tau)^n}\right]^{(n-1)} \end{vmatrix}_{\tau=r} = (1-r^2)^{-n^2}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 0! & & & * \\ & 1! & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (n-1)! \end{vmatrix} = (1-r^2)^{-n^2} \cdot 1!2!\cdots(n-1)!$$

因而 $N(f)\rho^l(r)$ 等于

$$r^{-(l_{k+1}+\cdots+l_n)} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!2!\cdots(n-1)!}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \tau^{l_1}, & \cdots, & \tau^{l_k}, & p_{m_1}(r\tau), & \cdots, & p_{m_{n-k}}(r\tau) \\ (\tau^{l_1})', & \cdots, & (\tau^{l_k})', & p'_{m_1}(r\tau), & \cdots, & p'_{m_{n-k}}(r\tau) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (\tau^{l_1})^{(n-1)}, & \cdots, & (\tau^{l_k})^{(n-1)}, & p_{m_1}^{(n-1)}(r\tau), & \cdots, & p_{m_{n-k}}^{(n-1)}(r\tau) \end{vmatrix}, \tag{1.10.9}$$

再利用华罗庚[1]中定理 1.2.4 的结果:

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!2!\cdots(n-1)!} \begin{vmatrix} f_1(x), & \cdots, & f_n(x) \\ f_1'(x), & \cdots, & f_n'(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_1^{(n-1)}(x), & \cdots, & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}_{x=r}$$

$$= \lim_{\substack{x_1\to r \\ \cdots\cdots \\ x_n\to r}} \frac{\begin{vmatrix} f_1(x_1), & \cdots, & f_n(x_1) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_1(x_n), & \cdots, & f_n(x_n) \end{vmatrix}}{\prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)}, \tag{1.10.10}$$

因此 (1.10.9) 可以写成：$N(f)\rho^l(r)$ 等于

$$r^{-(l_{k+1}+\cdots+l_n)}\cdot\lim_{\substack{x_1\to r\\ \cdots\\ x_n\to r}}\begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{l_k}, & \cdots, & x_n^{l_k}\\ p_{m_1}(rx_1), & \cdots, & p_{m_1}(rx_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{m_{n-k}}(rx_1), & \cdots, & p_{m_{n-k}}(rx_n)\end{vmatrix}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)}. \tag{1.10.11}$$

由引理 1.10.3，$p_m(x)=\sum\limits_{s=0}^{n-1}b_m^s x^s$，则

$$\begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x^{l_k}, & \cdots, & x_n^{l_k}\\ p_{m_1}(rx_1), & \cdots, & p_{m_1}(rx_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{m_{n-k}}(rx_1), & \cdots, & p_{m_{n-k}}(rx_n)\end{vmatrix}=\sum_{0\leqslant p_1\neq p_2\neq\cdots\neq p_{n-k}\leqslant n-1}$$

$$\cdot b_{m_1}^{p_1}\cdots b_{m_{n-k}}^{p_{n-k}}r^{p_1+\cdots+p_{n-k}}\begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{l_k}, & \cdots, & x_n^{l_k}\\ x_1^{p_1}, & \cdots, & x_n^{p_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{p_{n-k}}, & \cdots, & x_n^{p_{n-k}}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{n-1\geqslant q_1>q_2>\cdots>q_{n-k}\geqslant 0}\ \sum_{(p_1,\cdots,p_{n-k})\in(q_1,\cdots,q_{n-k})}\delta_{(q_1,\cdots,q_{n-k})}^{(p_1,\cdots,p_{n-k})}$$

$$\cdot b_{m_1}^{p_1}\cdots b_{m_{n-k}}^{p_{n-k}}r^{q_1+\cdots+q_{n-k}}M_{(l_1,\cdots,l_k,q_1,\cdots,q_{n-k})}(x_1,\cdots,x_n),$$

此处符号 $(p_1,\cdots,p_{n-k})\in(q_1,\cdots,q_{n-k})$ 表示 $(p_1,\cdots p_{n-k})$ 是 $(q_1,\cdots,q_{n-k})$ 的一个排列，而 $\delta_{(q)}^{(p)}$ 则是排列的奇偶符号。

但

$$\sum_{(p_1,\cdots,p_{n-k})\in(q_1,\cdots,q_{n-k})} \delta^{(p_1,\cdots,p_{n-k})}_{(q_1,\cdots,q_{n-k})} b^{p_1}_{m_1}\cdots b^{p_{n-k}}_{m_{n-k}}$$

$$=\begin{vmatrix} b^{q_1}_{m_1}, & \cdots, & b^{q_{n-k}}_{m_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{q_1}_{m_{n-k}}, & \cdots, & b^{q_{n-k}}_{m_{n-k}} \end{vmatrix} = C^{q_1,\cdots,q_{n-k}}_{m_1,\cdots,m_{n-k}}. \quad (1.10.12)$$

又

$$\lim_{\substack{x_1\to r\\ \cdots\\ x_n\to r}} \frac{M_{(l_1,\cdots,l_k,q_1,\cdots,q_{n-k})}(x_1,\cdots,x_n)}{\prod_{i<j}(x_j-x_i)} = N^{(l_1-n+1,l_2-n+2,\cdots,l_k-n+k,q_1-n+k+1,\cdots,q_{n-k})}$$

$$\cdot r^{l_1+\cdots+l_k+q_1+\cdots+q_{n-k}-\frac{n}{2}(n-1)}, \quad (1.10.13)$$

所以上式中如有 q_i 和某 l_j 相同，则相应的系数为零。由(1.10.11)，(1.10.12)和(1.10.13)得到：$N(f)\rho^f(r)$ 等于

$$r^{-(l_{k+1}+\cdots+l_n)} \sum_{n-1\geqslant q_1>q_2>\cdots>q_{n-k}\geqslant 0} C^{q_1,\cdots,q_{n-k}}_{m_1,\cdots,m_{n-k}}$$

$$\cdot N(l_1-n+1,\cdots,l_k-n+k,q_1-n+k+1,\cdots,q_{n-k})$$

$$\cdot r^{\sum_1^k l_i+\sum_1^{n-k} q_i-\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= r^{\sum_{i=1}^n |l_i|-\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \sum_{n-1\geqslant q_1>q_2>\cdots>q_{n-k}\geqslant 0} C^{q_1,\cdots,q_{n-k}}_{m_1,\cdots,m_{n-k}} \cdot N^{(l_1-n+1,\cdots,l_k-n+k,q_1-n+k+1,\cdots,q_{n-k})} \cdot r^{2(q_1+\cdots+q_{n-k})}.$$

上式中 $l_1-n+1=f_1,\cdots,l_k-n+k=f_k$；令 $q_1-n+k+1=\xi_{k+1},\cdots q_{n-k}=\xi_n$，则 $N(l_1-n+1,\cdots,l_k-n+k,q_1-n+k+1,\cdots,q_{n-k})=N(f_1,\cdots f_k,\xi_{k+1},\cdots,\xi_n)$；$q_1+\cdots+q_{n-k}=\xi_{k+1}+\cdots+\xi_n+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$，而条件 $n-1\geqslant q_1>\cdots>q_{n-k}\geqslant 0$ 则成为 $k\geqslant\xi_{k+1}\geqslant\cdots\geqslant\xi_n\geqslant 0$。因此最后有

$$N(f)\rho^f(r)=r^{\sum_1^n|l_i|-\frac{1}{2}n(n-1)+(n-k)(n-k-1)}\sum_{k\geqslant\xi_{k+1}\geqslant\cdots\geqslant\xi_n\geqslant 0}$$

$$\cdot N(f_1,\cdots,f_k,\xi_{k+1},\cdots,\xi_n)\,C_{m_1,\cdots,m_{n-k}}^{\xi_{k+1}+n-k-1,\cdots,\xi_n}\,r^{2(\xi_{k+1}+\cdots+\xi_n)}$$

$$=r^{f_1+\cdots+f_k-l_{k+1}\cdots l_n}\sum_{k\geqslant\xi_{k+1}\geqslant\cdots\geqslant\xi_n\geqslant 0}N(f_1,\cdots,f_k,\xi_{k+1},\cdots,\xi_n)$$

$$\cdot\, C_{m_1,\cdots,m_{n-k}}^{\xi_{k+1}+n-k-1,\cdots,\xi_n}\,r^{2(\xi_{k+1}+\cdots+\xi_n)}. \tag{1.10.14}$$

综合上述成为

定理 1.10.3 当 $l_1>l_2>\cdots>l_k\geqslant 0>l_{k+1}>\cdots>l_n$ 时，$\rho^f(r)$ 由(1.10.14)所示，其中 $l_i=f_i+n-i$，$m_1=|l_{k+1}|$，$\cdots$，$m_{n-k}=|l_n|$，而系数

$$C_{m_1,\cdots,m_{n-k}}^{q_1,\cdots,q_{n-k}}=\begin{vmatrix} b_{m_1}^{q_1}, & \cdots, & b_{m_1}^{q_{n-k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m_{n-k}}^{q_1}, & \cdots, & b_{m_{n-k}}^{q_{n-k}} \end{vmatrix},$$

$$b_m^q=(-1)^q\frac{(n+m-1)\cdots(n-q)}{q!(m-1)!(m+q)!}.$$

第二章　酉群上 Fourier 级数的 Cesàro 求和

§2.1　Cesàro 求和

若 $u(U)$ 是 n 阶酉群 U_n 上的可积函数，它的 Fourier 级数为

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)), \qquad (2.1.1)$$

而

$$C_{f_1\cdots f_n}=\int_{U_n} u(V)\overline{\Phi_{f_1\cdots f_n}(V)}\dot{V}.$$

华罗庚[2]定义了(2.1.1)的 Abel 平均为

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n} \rho^f(r)\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)), \qquad (2.1.2)$$

并且证明了：如果 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么，当 $r\to 1$ 时，(2.1.2)的极限是存在的，且等于 $u(U)$。即，$u(U)$ 的 Fourier 级数(2.1.1)是可以 Abel 求和于它自己.

我们在前一章中应用复杂的矩阵积分技巧，给出了 $\rho^f(r)$ 的具体表达式. 这一章，在 Abel 求和的启发下，我们研究了(2.1.1)的 Cesàro 求和. 在§2.2中，给出了 Cesàro 求和的定义和对应的核. §2.3——§2.4，证明了如下的 Riesz 型定理：若 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么，$u(U)$ 的 Fourier 级数(2.1.1)可以 (C,α) 求和于它自己，但 $\alpha>\frac{n-1}{n}$.

在 Cesàro 求和的定义中，不仅核可以用矩阵形式明白地表示出来，其求和系数及一些有关积分常数也都可以具体算出来. 为了对一般的 Cesàro 求和有直观的了解，比较仔细地研究了 Cesàro 求和中最典型且最重要的情形，即 Fejér 求和的情形作为例子.

通过这个例子,其它一般的 Cesàro 求和中的一些系数及常数也可以用类似的方法定出来. 这是 §2.5——§2.7 的内容. 所用的方法是上一章中所用过的矩阵积分的进一步应用.

沿着这个思想发展下去的一些工作, 例如, 一般紧致群上的逼近理论等将在第四章中叙述之. 这一章的内容取自龚升[2].

§ 2.2 Cesàro 求和的定义和核

定义 在 U_n 上可积函数 $u(U)$ 的 Fourier 级数 (2.1.1) 的 Cesàro (c,α) 和定义为

$$\sum_{nN\geqslant f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant -nN} B^{\alpha}_{f_1\cdots f_n}\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)), \tag{2.2.1}$$

这里

$$B^{\alpha}_{f_1\cdots f_n}=\frac{1}{CN(f)}\int_{U_n}\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V})\mathbf{K}^{\alpha}_N(V)\dot{V}. \tag{2.2.2}$$

(2.2.2) 式中的 $\mathbf{K}^{\alpha}_N(V)$ 为 Cesàro(c,α) 核, 它等于

$$\frac{\det\left[\sum\limits_{k=0}^{N}A^{\alpha-1}_{N-k}V^k(I-\overline{V}'^{2k+1})\right]}{B^{\alpha}_N(2A^{\alpha}_N)^{n^2}\det^n(I-\overline{V}')}, \tag{2.2.3}$$

这里

$$B^{\alpha}_N=\frac{1}{C}\int_{U_n}\frac{\det^n\left[\sum\limits_{k=0}^{N}A^{\alpha-1}_{N-k}V^k(I-\overline{V}'^{2k+1})\right]}{(2A^{\alpha}_N)^{n^2}\det(I-\overline{V}')}\dot{V}, \tag{2.2.4}$$

而

$$A^{\alpha}_N=C^{N+\alpha}_N=\frac{(\alpha+N)\cdots(\alpha+1)}{N!}.$$

当然在以上的定义中要求 $\alpha>-1$.

首先要证明

定理 2.2.1 在 U_n 上可积的函数 $u(U)$ 的 Fourier 级数(2.1.1) 的 Cesàro(c,α) 和 (2.2.1) 可以表为

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU)\mathrm{K}_N^\alpha(V)\dot{V}, \tag{2.2.5}$$

这里 $\mathrm{K}_N^\alpha(V)$ 由 (2.2.3) 所定义.

证 若 $e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}$ 为 $\bar{V}$ 的特征根，那么

$$\sum_{nN\geqslant f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant -nN} B^\alpha_{f_1\cdots f_n}N(f)M_{f_1\cdots f_n}(\bar{V})$$
$$=\mathrm{K}_N^\alpha(V)D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}), \tag{2.2.6}$$

这里 $M_{f_1\cdots f_n}(\bar{V})$ 见华罗庚[1].

现在来证明 (2.2.6). 把 (2.2.6) 的两边看成 $e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}$ 的函数，由于 (2.2.6) 左右两边都是 $e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}$ 的多项式，比较系数立刻得到

$$B^\alpha_{f_1\cdots f_n}N(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} e^{i(f_1\theta_1+\cdots+f_n\theta_n)}\mathrm{K}_N^\alpha(V)$$
$$\cdot D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

应用第一章中惯用的矩阵积分的技巧，上式即为 (2.2.2). 所以 (2.2.6) 是成立的.

从 (2.2.6) 出发，其左右两边除以 $D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})$，即得

$$\sum_{nN\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant -nN} B^\alpha_{f_1\cdots f_n}N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\bar{V})=\mathrm{K}_N^\alpha(V). \tag{2.2.7}$$

由 §0.2，可以知道 (2.2.1) 就是

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU)\sum_{nN\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant -nN} B^\alpha_{f_1\cdots f_n}N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\bar{V})\dot{V},$$

而从 (2.2.7)，此即 (2.2.5).

立刻可以看到，这样所定义的 Cesàro (c,α) 和与华罗庚所定义的 Abel 和，(c,α) 核与 Poisson-华核之间的关系，与普通的 Fourier 级数是一样的. 即当 α 趋于无穷时，(c,α) 核就成为 Poisson-华核.

如果当 N 趋于无穷时，(2.2.1) 的极限是存在的，那么称 $u(U)$ 的 Fourier 级数 (2.1.1) 是可以 (c,α) 求和的.

§2.3 Cesàro 核的半定正性

我们将要着手证明如下的 Riesz 型定理.

定理 2.3.1 设 $u(U)$ 在 U_n 上连续,那么它的 Fourier 级数 (2.1.1) 可以 (c,α) 求和于它自己,但 $\alpha > \frac{n-1}{n}$.

为了证明上述定理,先来证明:当 $\alpha > \frac{n-1}{n}$时, Cesàro 核是"半定正"的 (Quasi-Positive), 即要证明如下的

定理 2.3.2 (c,α) 核 $K_N^\alpha(V)$ 是半定正的,即

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} |K_N^\alpha(V)|\dot{V} \leqslant M, \tag{2.3.1}$$

这里 M 只与 n, α 有关,而与 N 无关. 但 $\alpha > \frac{n-1}{n}$.

证 当 n 是偶数时, (2.3.1) 是显然的. 因为在这种情形, $K_N^\alpha(V)$ 本身是非负的,以至取 $M=1$ 即可.

当 n 是奇数时,应用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, (2.3.1) 显然成立. 现在假设 (2.3.1) 当酉群的阶数小于 n 时都成立,从而导出当阶数等于 n 时也成立.

容易看出, $|B_N^\alpha|$ 当 N 趋于无穷时,不趋于零. 因此,只要证明

$$I = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi} |\sigma_N^\alpha(\theta_1)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^n \cdot |D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})|^2 d\theta_1\cdots d\theta_n \tag{2.3.2}$$

有界即可,这里

$$\sigma_N^\alpha(\theta) = \frac{1}{2A_N^\alpha \sin\frac{1}{2}\theta} \operatorname{Im}\left\{\sum_{k=0}^N A_{N-k}^{\alpha-1} e^{i(k+\frac{1}{2})\theta}\right\}.$$

先取 $\delta \geqslant 1/N$,将积分区域分解为

R_1: $\delta \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi$,

R_2: $\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_n:\ \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \delta \geqslant \theta_n \geqslant -\pi,$$

$$R_{n+1}:\ \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant \delta.$$

记(2.3.2)的积分，其积分区域在 R_j 上者为 I_j。于是

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_{n+1}.$$

先考虑 I_2。将 R_2 再分解为

$$R_{2n}:\ \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\delta,$$

$$R_{2n-1}:\ \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant -\delta \geqslant \theta_n \geqslant -\pi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_{23}:\ \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \delta \geqslant \theta_2 \geqslant -\delta \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi,$$

$$R_{22}:\ \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \delta \geqslant -\delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi.$$

记(2.3.2)的积分，其积分区域在 R_{ij} 上者为 I_{ij}。研究 I_{2n}。

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{R_{2n}} |\sigma_N^{\alpha}(\theta_1)\cdots\sigma_N^{\alpha}(\theta_n)|^{s} \\
&\qquad \cdot |D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})|^2 d\theta_1\cdots d\theta_n \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta} |\sigma_N^{\alpha}(\theta_2)\cdots\sigma_N^{\alpha}(\theta_n)|^{s} \\
&\qquad \cdot |D(e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_n})|^2 d\theta_2\cdots d\theta_n \\
&\qquad \cdot \int_{\delta}^{\pi} |\sigma_N^{\alpha}(\theta_1)|^{s} \prod_{j=2}^{n} |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_j}|^2 d\theta_1.
\end{aligned}$$

但是，由于

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=2}^{n} |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_j}|^2 = \prod_{j=2}^{n} |(1 - e^{i\theta_1}) - (1 - e^{i\theta_j})|^2 \\
&= \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+l_1+\cdots+m_n+l_n=2(n-1)}}^{n-1} \sum_{l_1=0}^{n-2} \sum_{m_2=0}^{1} \sum_{l_2=0}^{1} \cdots \sum_{m_n=0}^{1} \sum_{l_n=0}^{1} (-1)^{2(n-1)-m_1-l_1}(1 - e^{i\theta_1})^{m_1} \\
&\quad \cdot (1 - e^{-i\theta_1})(1 - e^{i\theta_2})^{m_2}(1 - e^{-i\theta_2})^{l_2}\cdots \\
&\quad \cdot (1 - e^{i\theta_n})^{m_n}(1 - e^{-i\theta_n})^{l_n},
\end{aligned}$$

因此，

$$I_{2n} \leqslant \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+s_2+\cdots+s_n=2(n-1)}}^{2(n-1)} \sum_{s_2=0}^{2} \cdots \sum_{s_n=0}^{2} a_{s_1\cdots s_n} \int\cdots\int_{\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta} |1-e^{i\theta_2}|^{s_2}\cdots$$

$$\cdots|1-e^{i\theta_n}|^{s_n}|\sigma_N^\alpha(\theta_2)|^n\cdots|\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^n$$

$$\cdot|D(e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_n})|^2 d\theta_2\cdots d\theta_n \int_\delta^\pi |1-e^{i\theta_1}|^{s_1}$$

$$\cdot|\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^n d\theta_1,$$

这里 $a_{s_1\cdots s_n}$ 是只与 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 有关的绝对常数。

为了估计上述积分，取其中的任意一个积分

$$I_{s_1\cdots s_n} = \int_\delta^\pi |1-e^{i\theta_1}|^{s_1}|\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^n d\theta_1$$

$$\int\cdots\int_{\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta} \cdot|1-e^{i\theta_2}|^{s_2}\cdots|1-e^{i\theta_n}|^{s_n}|\sigma_N^\alpha(\theta_2)|^n\cdots$$

$$\cdot|\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^n|D(e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_n})|^2 d\theta_2\cdots d\theta_n. \tag{2.3.3}$$

由于 $\delta \geqslant \frac{1}{N}$，所以

$$|\sigma_N^\alpha(\theta)| \leqslant aN^{-\alpha}|\theta|^{-\alpha-1}, \tag{2.3.4}$$

这里 a 表示绝对常数。 我们以后常用 a 表示不同的绝对常数。因此

$$I_{s_1\cdots s_n} \leqslant a\int_\delta^\pi N^{-\alpha n}\theta^{-\alpha n-n+s_1}d\theta\, N^{n-1}\delta^{s_2+\cdots+s_n},$$

这里用到了归纳假定，

$$\int\cdots\int_{\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta} |\sigma_N^\alpha(\theta_2)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^{n-1}$$

$$|D(e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_n})|^2 d\theta_2\cdots d\theta_n$$

是有界的. 由于$\alpha > \frac{n-1}{n}$, $0 \leqslant s_1 \leqslant 2(n-1)$，所以

$$-\alpha n - n + s_1 < -(n-1) - n + s_1 < -1.$$

因此，

$$I_{s_1\cdots s_n} \leqslant aN^{-\alpha n+n-1}\delta^{-\alpha n-n+s_1+1+s_2+\cdots+s_n} = O((N\delta)^{-\alpha n+n-1}),$$

这是因为 $s_1+s_2+\cdots+s_n = 2(n-1)$。

于是得到

$$I_{2n}=O((N\delta)^{-\alpha n+n-1})。$$

再来考虑 $I_{\overline{2n-1}}$。这时候，

$$I_{\overline{2n-1}}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta}|\sigma_N^\alpha(\theta_2)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_{n-1})|^n$$

$$\cdot|D(e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_{n-1}})|^2d\theta_2\cdots d\theta_{n-1}$$

$$\cdot\int_\delta^\pi|\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^n\prod_{j=2}^{n-1}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_n}|^2d\theta_n\int_\delta^\pi|\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^n$$

$$\cdot\prod_{j=2}^{n}|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_j}|^2d\theta_1。$$

与考虑 I_{2n} 时一样，

$$\prod_{j=2}^{n}|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_j}|^2\prod_{k=2}^{n-1}|e^{i\theta_k}-e^{i\theta_n}|=$$

$$\prod_{j=2}^{n}|(1-e^{i\theta_1})-(1-e^{i\theta_j})|^2\cdot\prod_{k=2}^{n-1}|(1-e^{i\theta_k})-(1-e^{i\theta_n})|^2$$

$$\leqslant\sum_{m_1=0}^{2n-2}\sum_{m_2=0}^{4}\cdots\sum_{m_{n-1}=0}^{4}\sum_{m_n=0}^{2n-2}\cdot b_{m_1\cdots m_n}$$

$$|1-e^{i\theta_1}|^{m_1}|1-e^{i\theta_2}|^{m_2}\cdots|1-e^{i\theta_n}|^{m_n},$$

这里 $b_{m_1\cdots m_n}$ 是只与 $m_1,\cdots,m_n$ 有关的绝对常数。

但是

$$\int_\delta^\pi|1-e^{i\theta_1}|^{m_1}|\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^nd\theta_1\int_{-\pi}^{-\delta}|1-e^{i\theta_n}|^{m_n}|\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^nd\theta_n$$

$$\cdot\int\cdots\int_{\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta}|1-e^{i\theta_2}|^{m_2}\cdots|1-e^{i\theta_{n-1}}|^{m_{n-1}}$$

$$\cdot|\sigma_N^\alpha(\theta_2)|^n\cdots|\sigma_N^\alpha(\theta_{n-1})|^n|D(e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_{n-1}})|^2\cdot d\theta_2\cdots d\theta_{n-1}$$

$$\leqslant\int_\delta^\pi N^{-\alpha n}\theta_1^{-\alpha n-n+m_1}d\theta_1\int_{-\pi}^{-\delta}N^{-\alpha n}$$

$$\cdot\theta_n^{-\alpha n-n+m_n}d\theta_n\cdot\delta^{4n-6-m_1-m_n}N^{2(n-2)}$$

$$=O(N^{-\alpha n}\delta^{-\alpha n-n+m_1+1}N^{-\alpha n}\delta^{-\alpha n-n+m_n+1}\delta^{4n-6-m_1-m_n}N^{2(n-2)})$$

$$=O((N\delta)^{2(-\alpha n+n-1)}),$$

这里用到了归纳假设，

$$\int_{\delta\geq\theta_2\geq\cdots\geq\theta_{n-1}\geq-\delta}\cdots\int |\sigma_N^\alpha(\theta_2)|^{n-2}\cdots|\sigma_N^\alpha(\theta_{n-1})|^{n-2}$$
$$\cdot |D(e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_{n-1}})|^2 d\theta_2\cdots d\theta_{n-1}$$

是有界的。所以得到

$$I_{2\,\overline{n-1}} = O((N\delta)^{2(-\alpha n+n-2)}).$$

同样可以证明

$$I_{2\,\overline{n-j}} = O((N\delta)^{(j+1)(-\alpha n+n-j-1)}).$$

以至最后得到

$$I_2 = O((N\delta)^{-\alpha n+n-1}) + O((N\delta)^{2(-\alpha n+n-2)})$$
$$+\cdots+\cdots+O((N\delta)^{(j+1)(-\alpha n+n-j-1)})+\cdots$$
$$+O((N\delta)^{-\alpha n^2}).$$

如同处理 I_2 一样，同样可以证明

$$I_3 = O((N\delta)^{2(-\alpha n+n-2)}) + O((N\delta)^{3(-\alpha n+n-3)})$$
$$+\cdots+O((N\delta)^{-\alpha n^2}),\cdots\cdots$$
$$I_{n+1} = O((N\delta)^{-\alpha n^2}).$$

现在来处理 R_1 上的积分 I_1。将 R_1 再划分成

$$s_1:\ \delta\geq\theta_1\geq\cdots\cdots\geq\theta_{n-1}\geq\theta_n\geq-\delta,$$
$$s_2:\ \delta\geq\theta_1\geq\cdots\cdots\geq\theta_{n-1}\geq-\delta\geq\theta_n\geq-\pi,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_{n+1}:\ -\delta\geq\theta_1\geq\cdots\cdots\geq\theta_n\geq-\pi.$$

记(2.3.2)的积分，其积分区域在 s_k 上者为 J_k，于是，如同处理 I_{jk} 的情况一样，可以证明

$$J_2 = O((N\delta)^{-\alpha n+n-1}) + O((N\delta)^{2(-\alpha n+n-2)})$$
$$+\cdots+O((N\delta)^{-\alpha n^2}),$$
$$J_3 = O((N\delta)^{2(-\alpha n+n-2)})+\cdots+O((N\delta)^{-\alpha n^2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$J_{n+1} = O((N\delta)^{-\alpha n^2}).$$

最后来考察 J_1.

$$J_1 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\delta\geq\theta_1\geq\cdots\geq\theta_n\geq-\delta}\cdots\int |\sigma_N^\alpha(\theta_1)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^n$$

$$
\cdot |D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n \leqslant
$$

$$
\int \cdots \int_{\delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\delta} |\sigma_N^\alpha(\theta_2) \cdots \sigma_N^\alpha(\theta_n)|^n |D(e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})|^2 d\theta_2 \cdots d\theta_n
$$

$$
\cdot \int_{\theta_2}^{\delta} |\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^n \prod_{j=2}^{n} |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_j}|^2 d\theta_1 \leqslant a(N\delta)^{2(n-1)}
$$

$$
\cdot \int \cdots \int_{\delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\delta} |\sigma_N^\alpha(\theta_2) \cdots \sigma_N^\alpha(\theta_n)|^{n-1}
$$

$$
\cdot |D(e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})|^2 \, d\theta_2 \cdots d\theta_n.
$$

由归纳假设，上式为

$$
O((N\delta)^{2(n-1)}).
$$

总结起来

$$
\begin{aligned}
I = {} & O((N\delta)^{2(n-1)}) + O((N\delta)^{-\alpha n+n-1}) \\
& + O((N\delta)^{2(-\alpha n+n-2)}) + \cdots + O((N\delta)^{-\alpha n^2}).
\end{aligned}
$$

取 $\delta = \dfrac{1}{N}$，即得

$$
I = O(1),
$$

此即证明了 (2.3.1).

§2.4 Riesz 型定理的证明

现在来证明定理 2.3.1。

由 §2.2 知道，

$$
\frac{1}{C}\int_{U_n} K_N^\alpha(V)\dot{V} = 1. \tag{2.4.1}
$$

并且在 §2.2 中已经证明了：$u(U)$ 的 Fourier 级数 (2.1.1) 的 Cesàro (c, α) 和 (2.2.1) $\sum_N^\alpha(U)$ 可以写成

$$
\frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU) K_N^\alpha(V)\dot{V}.
$$

因此，从 (2.4.1) 得到

$$
\sum_N^\alpha (U) - u(U) = \frac{1}{C}\int_{U_n} (u(VU) - u(U)) K_N^\alpha(V)\dot{V}. \tag{2.4.2}
$$

我们要证明：当N趋于无穷时，

$$\sum_N^a (U) \to u(U).$$

只要证明：当N趋于无穷时，

$$\int_{U_n} (u(VU) - u(U)) \mathrm{K}_N^a(V) \dot{V} \tag{2.4.3}$$

趋于零即可。而(2.4.3)即是

$$I = \frac{1}{(2\pi)^n B_N^a} \int_{\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi} \cdots \int \varphi(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) \cdot (\sigma_N^a(\theta_1) \cdots \sigma_N^a(\theta_n))^n |D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n, \tag{2.4.4}$$

这里

$$\varphi(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) = \frac{1}{\omega_n'} \int_{(U_n)} (u(VU) - u(U)) [\dot{V}]. \tag{2.4.5}$$

如同证明定理 2.3.2 一样，将积分区域

$$\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi$$

分解为 $R_1, R_2, \cdots, R_{n+1}$.

记(2.4.4)的积分，其积分区域在 R_j 上者为 I_j'。由于 $u(U)$ 在 U_n 上连续，以至在 U_n 上，我们有

$$|\varphi(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})| \leqslant L.$$

这里L是一个绝对常数。因此，当选取 $\delta \geqslant \frac{1}{N}$ 时，如同在§2.3中处理 $I_2, \cdots, I_{n+1}$ 时一样，我们来处理 $I_2', \cdots, I_{n+1}'$.

先考虑 I_2'。如同上节中处理 I_2 一样，将 R_2 分解为 R_{2n}, $R_{2\,\overline{n-1}}, \cdots, R_{22}, R_{21}$。记(2.4.4)的积分，其积分区域在 R_{ij} 上者为 I_{ij}'。研究 I_{2n}'.

$$I_{2n}' = \frac{1}{B_N^a (2\pi)^n} \int_{R_{2n}} \cdots \int \varphi(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) (\sigma_N^a(\theta_1) \cdots \sigma_N^a(\theta_n))^n \cdot |D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n. \tag{2.4.6}$$

从(2.4.6)可得

$$|I'_{2n}| \leqslant \frac{L}{|B_N^\alpha|(2\pi)^n} \int\cdots\int_{\delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\delta} |\sigma_N^\alpha(\theta_2)|^n \cdots |\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^n$$

$$\cdot |D(e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})|^2 d\theta_2 \cdots d\theta_n \int_\delta^\pi |\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^n$$

$$\cdot \prod_{j=2}^n |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_j}|^2 d\theta_1.$$

如同上节一样，考虑 $I_{s_1\cdots s_n}$，这里 $I_{s_1\cdots s_n}$ 由 (2.3.3) 所定义，利用 (2.3.4) 得到

$$I_{s_1\cdots s_n} \leqslant a \int_\delta^\pi N^{-\alpha n} \theta_1^{-\alpha n - n + s_1} d\theta_1 \cdot N^{n-1} \delta^{s_2 + \cdots + s_n}$$

$$\cdot \int\cdots\int_{\delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\delta} |\sigma_N^\alpha(\theta_2) \cdots \sigma_N^\alpha(\theta_2)|^{n-1}$$

$$\cdot |D(e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})|^2 d\theta_2 \cdots d\theta_n.$$

由定理 2.3.2，我们知道

$$I_{s_1\cdots s_n} = O((N\delta)^{-\alpha n + n - 1}).$$

因此，得到

$$|I'_{2n}| = O((N\delta)^{-\alpha n + n - 1}) + O((N\delta)^{2(-\alpha n + n - 2)}) + \cdots + O((N\delta)^{-\alpha n^2}).$$

同样可以证明

$$|I'_{\overline{2\,n-1}}| = O((N\delta)^{2(-\alpha n + n - 2)}) + \cdots + O((N\delta)^{-\alpha n^2}).$$

因此，

$$|I'_2| = O((N\delta)^{-\alpha n + n - 1}) + \cdots + O((N\delta)^{-\alpha n^2}).$$

用同样的方法，可以证明

$$|I'_3| = O((N\delta)^{2(-\alpha n + n - 2)}) + \cdots + O((N\delta)^{-\alpha n^2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|I'_{n+1}| = O((N\delta)^{-\alpha n^2}).$$

因此，

$$|I'_2| + \cdots + |I'_{n+1}| = O((N\delta)^{-\alpha n + n - 1}) + \cdots + O((N\delta)^{j(-\alpha n + n - j)}) + \cdots + O((N\delta)^{-\alpha n^2}).$$

现在来考虑 I'_1。如同在 §2.3 中处理 I_1 一样，先将 R_1 分解为

$s_1, \cdots, s_{n+1}$. 并且记 (2.4.4) 的积分，其积分区域在 s_k 上者为 J'_k. 如同上述的证明一样，可以得到

$$|J'_2| + \cdots + |J'_{n+1}| = O((N\delta)^{-\alpha n+n-1})$$
$$+ O((N\delta)^{2(-\alpha n+n-2)}) + \cdots + O((N\delta)^{-\alpha n^2}).$$

最后来考虑 J'_1.

$$J'_1 = \frac{1}{(2\pi)^n B_N^n} \underset{\delta>\theta_1>\cdots>\theta_n>-\delta}{\int\cdots\int} \varphi(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})$$
$$\cdot (\sigma_N^\alpha(\theta_1)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_n))^n \, |D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})|^2 d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

由于 $u(U)$ 在 U_n 上连续，以至对于任意给定的 $\eta > 0$，一定可以选取 δ 充分小，使得当

$$\delta \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\delta$$

时，

$$|\varphi(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})| < \eta.$$

因此，由定理 2.3.2，当 $\alpha > \frac{n-1}{n}$ 时，

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} |\mathrm{K}_N^\alpha(V)| \dot{V} < M.$$

以至对于任意 $\varepsilon > 0$，可以选取 δ 充分小，使得

$$|J'_1| < \varepsilon/2.$$

因而对于任给的 $\varepsilon > 0$，选定了 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 之后，由于 $\alpha n - n + 1 > 0$，因此，总可以选取 N 充分大，使

$$|I'_2| + \cdots + |I'_{n+1}| + |J'_2| + \cdots + |J'_{n+1}| < \varepsilon/2.$$

总起来，得到：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，我们有

$$|I| < \varepsilon.$$

这就证明了定理 2.3.1.

§ 2.5 Fejér 求和

为了对 (c,α) 求和有更直观的了解，现在对其中最简单而最重要的 Fejér 求和进行仔细的研究. 特别是 (c,α) 求和中的系数及积分常数都可以参照以下 Fejér 求和中的系数及积分常数

把它们定出来。

从§2.2中的定义容易看出 Fejér 核为

$$\frac{1}{B_N(N+1)^{n^2}}\left|\frac{\det(I-V^{N+1})}{\det(I-V)}\right|^{2n}, \tag{2.5.1}$$

这里

$$B_N = B'_N = \frac{1}{C(N+1)^{n^2}}$$

$$\cdot\int_{U_n}\left|\frac{\det(I-V^{N+1})}{\det(I-V)}\right|^{2n}\dot{V}. \tag{2.5.2}$$

特别有兴趣的是：Fejér 核也是定正的，而且具有如此简洁的形式。并且从此推出，当 $\alpha \geqslant 1$ 时，所有的 (c,α) 核都是定正的。

从定义知道，Fejér 求和的系数为

$$B_{f_1\cdots f_n} = B^1_{f_1\cdots f_n} = \frac{1}{B_N N(f)(N+1)^{n^2}C}$$

$$\cdot\int_{U_n}\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V})\left|\frac{\det(I-V^{N+1})}{\det(I-V)}\right|^{2n}\dot{V}. \tag{2.5.3}$$

而 $u(U)$ 的 Fourier 级数 (2.1.1) 的 Fejér 和成为

$$\sum_{nN\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant -nN} B_{f_1\cdots f_n}\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U))$$

$$=\frac{1}{B_N(N+1)^{n^2}C}\int_{U_n}u(VU)\left|\frac{\det(I-V^{N+1})}{\det(I-V)}\right|^{2n}\dot{V}. \tag{2.5.4}$$

Riesz 型定理（定理2.3.1）成为下述的 Fejér 型定理：若 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么 $u(U)$ 的 Fourier 级数 (2.1.1) 可以 Fejér 求和于它自己。

利用 Fejér 核的定正性可以比证明定理 2.3.1 简便得多地直接证明上述的 Fejér 型定理，而不必事先证明定理 2.3.2。这里从略（参阅定理 1.3.1 的证明）。

§2.6 系数的具体表达式

从这一节开始，我们将应用复杂而精巧的矩阵积分的技巧来

给出 Fejér 求和中系数和积分常数的具体表达式。通过这个计算过程，可以看出如何来写出一般的 $B^{n}_{l_1\cdots l_n}$ 的具体表达式及 B^{n}_{N} 的值。

由 (2.5.2) 及

$$D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\cdot D(1-e^{-i\theta_1},\cdots,1-e^{-i\theta_n})$$

出发，应用第一章中常用的技巧，得到(参阅§1.6——§1.8)

$$B_{l_1\cdots l_n N}(f)=(N+1)^{-n^2}(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}B_N^{-1}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_1\theta}e^{inN\theta}(1-e^{-i(N+1)\theta})^{2n}d\theta}{(1-e^{-i\theta})^{2n}}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_n\theta}e^{inN\theta}(1-e^{-i(N+1)\theta})^{2n}d\theta}{(1-e^{-i\theta})^{2n}} \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_1\theta}e^{inN\theta}(1-e^{-i(N+1)\theta})^{2n}d\theta}{(1-e^{-i\theta})^{2n-1}}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_n\theta}e^{inN\theta}(1-e^{-i(N+1)\theta})^{2n}d\theta}{(1-e^{-i\theta})^{2n-1}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_1\theta}e^{inN\theta}(1-e^{-i(N+1)\theta})^{2n}d\theta}{(1-e^{-i\theta})^{n+1}}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_n\theta}e^{inN\theta}(1-e^{-i(N+1)\theta})^{2n}d\theta}{(1-e^{-i\theta})^{n+1}} \end{vmatrix}. \tag{2.6.1}$$

记

$$a_p^q=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{iq\theta}(1-e^{-i(N+1)\theta})^{2n}d\theta}{(1-e^{-i\theta})^p}, \tag{2.6.2}$$

那么 (2.6.1) 可以写成

$$B_{l_1\cdots l_n N}(f)=(N+1)^{-n^2}(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}B_N^{-1}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} a_{2n}^{l_1+nN}, & a_{2n}^{l_2+nN}, & \cdots, & a_{2n}^{l_n+nN} \\ a_{2n-1}^{l_1+nN}, & a_{2n-1}^{l_2+nN}, & \cdots, & a_{2n-1}^{l_n+nN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^{l_1+nN}, & a_{n+1}^{l_2+nN}, & \cdots, & a_{n+1}^{l_n+nN} \end{vmatrix}. \tag{2.6.3}$$

引理 2.6.1 当 $p\leqslant 2n$ 时，

$$a_p^q=\frac{(2n)!}{(p-1)!}\sum_{\substack{k=0\\k+(N+1)s=q}}^{\infty}\sum_{s=0}^{2n}\frac{(-1)^s(p+k-1)!}{k!s!(2n-s)!}. \tag{2.6.4}$$

证 取 $z=re^{-i\theta}$, $0<r<1$, 那么

$$a_p^q = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{iq\theta}(1 - e^{-i(N+1)\theta})^{2n} d\theta}{(1 - e^{-i\theta})^p}.$$

由于 $p \leqslant 2n$，应用 Lebesgue 从属定理，上式等于

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{iq\theta}(1 - z^{N+1})^{2n} d\theta}{(1 - z)^p}. \tag{2.6.5}$$

但

$$(1 - z)^{-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p + k - 1)!}{k!(p - 1)!} z^k$$

及

$$(1 - z^{N+1})^{2n} = \sum_{s=0}^{2n} \frac{(-1)^s (2n)!}{s!(2n - s)!} z^{(N+1)s},$$

所以

$$\frac{(1 - z^{N+1})^{2n}}{(1 - z)^p} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{2n} \frac{(-1)^s (p + k - 1)!(2n)!}{k!(p - 1)!s!(2n - s)!} z^{k+(N+1)s}.$$

从 (2.6.2) 及 (2.6.5) 立刻得到 (2.6.4).

a_p^q 还可以写成

$$\frac{(2n)!}{(p - 1)!} \sum_{\substack{s=0 \\ q-(N+1)s\geqslant 0}}^{2n} \frac{(-1)^s (p+q-(N+1)s-1)!}{(q - (N + 1)s)!s!(2n - s)!}.$$

根据引理 2.6.1，得到，(2.6.3) 就是

$$B_{f_1\cdots f_n}N(f) = \frac{((2n)!)^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(2n - 1)!(2n - 2)!\cdots n!(N + 1)^{n^2} B_N}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \sum\limits_{\substack{s_1=0 \\ k_1\geqslant 0}}^{2n} \frac{(-1)^{s_1}(2n+k_1-1)!}{k_1!s_1!(2n-s_1)!}, & \cdots, & \sum\limits_{\substack{s_n=0 \\ k_n\geqslant 0}}^{2n} \frac{(-1)^{s_n}(2n+k_n-1)!}{k_n!s_n!(2n-s_n)!} \\ \sum\limits_{\substack{s_1=0 \\ k_1\geqslant 0}}^{2n} \frac{(-1)^{s_1}(2n-1+k_1-1)!}{k_1!s_1!(2n-s_1)!}, & \cdots, & \sum\limits_{\substack{s_n=0 \\ k_n\geqslant 0}}^{2n} \frac{(-1)^{s_n}(2n-1+k_n-1)!}{k_n!s_n!(2n-s_n)!} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum\limits_{\substack{s_1=0 \\ k_1\geqslant 0}}^{2n} \frac{(-1)^{s_1}(n+1+k_1-1)!}{k_1!s_1!(2n-s_1)!}, & \cdots, & \sum\limits_{\substack{s_n=0 \\ k_n\geqslant 0}}^{2n} \frac{(-1)^{s_n}(n+1+k_n-1)!}{k_n!s_n!(2n - s_n)!} \end{vmatrix}, \tag{2.6.6}$$

这里

$$k_1 = l_1 + nN - (N+1)s_1, \cdots,$$
$$k_n = l_n + nN - (N+1)s_n.$$

简化(2.6.6)，它的右边等于

$$\frac{((2n)!)^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(2n-1)!(2n-2)!\cdots n!(N+1)^{n^2}B_N}$$

$$\cdot \sum_{\substack{s_1=0\\k_1>0}}^{2n} \cdots \sum_{\substack{s_n=0\\k_n>0}}^{2n} \frac{(-1)^{s_1+\cdots+s_n}}{k_1!s_1!(2n-s_1)!\cdots k_n!s_n!(2n-s_n)!}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} (2n-1+k_1)!, & \cdots, & (2n-1+k_n)! \\ (2n-2+k_1)!, & \cdots, & (2n-2+k_n)! \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (n+k_1)!, & \cdots, & (n+k_n)! \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(n!)^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(2n-1)!\cdots n!(N+1)^{n^2}B_N}$$

$$\cdot \sum_{\substack{s_1=0\\k_1>0}}^{2n} \cdots \sum_{\substack{s_n=0\\k_n>0}}^{2n} C_{s_1}^{2n} C_n^{n+k_1} \cdots C_{s_n}^{2n} C_n^{n+k_n} (-1)^{s_1+\cdots+s_n}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} (2n-1+k_1)\cdots(n+1+k_1), & \cdots, & (2n-1+k_n)\cdots(n+1+k_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (n+2+k_1)(n+1+k_1), & \cdots, & (n+2+k_n)(n+1+k_n) \\ n+1+k_1, & \cdots, & n+1+k_n \\ 1, & \cdots, & 1 \end{vmatrix}.$$

上式右边的行列式等于

$$\lim_{x\to 1}(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \begin{vmatrix} (x^{-(n+1+k_1)})^{(n-1)}, & \cdots, & (x^{-(n+1+k_n)})^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (x^{-(n+1+k_1)})', & \cdots, & (x^{-(n+1+k_n)})' \\ x^{-(n+1+k_1)}, & \cdots, & x^{-(n+1+k_n)} \end{vmatrix}.$$

根据华罗庚[1]中的一条定理，它等于

$$\lim_{\substack{x_1\to 1\\ \cdots\\ x_n\to 1}} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(n-1)!\cdots 2!1!}{D(x_1,\cdots,x_n)}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} x_1^{-(n+1+k_1)}, & \cdots, & x_n^{-(n+1+k_1)} \\ x_1^{-(n+1+k_2)}, & \cdots, & x_n^{-(n+1+k_2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{-(n+1+k_n)}, & \cdots, & x_n^{-(n+1+k_n)} \end{vmatrix}$$

$$=\lim_{\substack{x_1\to 1\\ \cdots\\ x_n\to 1}} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(n-1)!\cdots 2!1!}{D(x_1,\cdots,x_n)}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} x_1^{(N+1)s_1-l_1}, & \cdots, & x_n^{(N+1)s_1-l_1} \\ x_1^{(N+1)s_2-l_2}, & \cdots, & x_n^{(N+1)s_2-l_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(N+1)s_n-l_n}, & \cdots, & x_n^{(N+1)s_n-l_n} \end{vmatrix}.$$

根据 $N(g_1,\cdots,g_n)$ 的定义，上式的右边就是

$$\begin{aligned}&(n-1)!\cdots 2!1!N((N+1)s_1-l_1,(N+1)s_2\\&\quad -l_2-1,\cdots,(N+1)s_n-l_n-n+1)\\&=(n-1)!\cdots 2!1!N((N+1)s_1-f_1-n+1,\\&\quad (N+1)s_2-f_2-n+1,\cdots,\\&\quad (N+1)s_n-f_n-n+1)\\&=(n-1)!\cdots 2!1!N((N+1)s_1-f_1,(N+1)s_2\\&\quad -f_2,\cdots,(N+1)s_n-f_n).\end{aligned}$$

最后，得到

$$B_{f_1\cdots f_n}=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(n!)^n(n-1)!\cdots 2!1!}{(N+1)^{n^2}(2n-1)!\cdots n!N(f)}$$

$$\cdot\sum_{\substack{s_1=0\\k_1\geq 0}}^{2n}\cdots\sum_{\substack{s_n=0\\k_n\geq 0}}^{2n}(-1)^{s_1+\cdots+s_n}C_{s_1}^{2n}C_n^{n+k_1}\cdots C_{s_n}^{2n}C_n^{n+k_n}$$

$$\cdot N((N+1)s_1-f_1,\cdots,(N+1)s_n-f_n),$$

这里

$$k_j=l_j+nN-(N+1)s_j,\ j=1,2,\cdots,n.$$

§2.7 积分常数的计算

从 $B_{f_1\cdots f_n}$ 的定义知道，$B_{0\cdots 0}=1$。所以

$$
\begin{aligned}
B_N = &\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(n!)^n(n-1)!\cdots 2!1!}{(N+1)^{n^2}(2n-1)!\cdots n!} \\
&\cdot \sum_{\substack{s_1=0\\ k_1\geqslant 0}}^{2n}\cdots\sum_{\substack{s_n=0\\ k_n\geqslant 0}}^{2n}(-1)^{s_1+\cdots+s_n}C_{s_1}^{2n}C_{n}^{n+k_1}\cdots C_{s_n}^{2n}C_{n}^{n+k_n} \\
&\cdot N((N+1)s_1,\cdots,(N+1)s_n),
\end{aligned}
\tag{2.7.1}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
k_j = n-j+nN-(N+1)s_j = &(N+1) \\
&\cdot(n-s_j)-j,\ j=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&N((N+1)s_1,\cdots,(N+1)s_n) \\
&= \frac{D((N+1)s_1+n-1,\cdots,(N+1)s_{n-1}+1,(N+1)s_n)}{D(n-1,\cdots,1,0)} \\
&= \frac{D((N+1)s_1,\cdots,(N+1)s_n)}{D(n-1,\cdots,1,0)}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
N((N+1)s_1,\cdots,(N+1)s_n) = &(N+1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&\frac{D(s_1,\cdots,s_n)}{D(n-1,\cdots,1,0)}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right).
\end{aligned}
$$

从 k_j 的定义知道，当 $N\geqslant n-1$ 时，要 $k_j\geqslant 0$，必须 $s_j=0,1,\cdots,n-1$。再应用以往惯用的方法，(2.7.1) 成为

$$
\begin{aligned}
B_N = &\frac{(n!)^n(n-1)!\cdots 2!1!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(N+1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}(2n-1)!\cdots n!}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\
&\cdot\sum_{n-1\geqslant s_1>\cdots>s_n\geqslant 0}\begin{vmatrix} A_{s_1}^1, & A_{s_1}^2, & \cdots, & A_{s_1}^n \\ A_{s_2}^1, & A_{s_2}^2, & \cdots, & A_{s_2}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s_n}^1, & A_{s_n}^2, & \cdots, & A_{s_n}^n \end{vmatrix}\frac{D(s_1,\cdots,s_n)}{D(n-1,\cdots,1,0)},
\end{aligned}
\tag{2.7.2}
$$

这里

$$A_{sl}^{k}=(-1)^{sl}C_{sl}^{2n}C_{n}^{n+(N+1)(n-sl)-k}.$$

在 (2.7.2) 的行列式中，有两个 s_l 与 $s_{l'}$ 是相同的时候，行列式为零，但 $n-1\geqslant s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n\geqslant 0$，所以只有 $s_1=n-1$，$s_2=n-2$，$\cdots$，$s_n=0$ 时，行列式不为零。于是，(2.7.2) 成为

$$B_N=\frac{(n!)^n(n-1)!\cdots 2!1!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(N+1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}(2n-1)!\cdots n!}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

$$\cdot\begin{vmatrix} A_{n-1}^{1}, & A_{n-1}^{2}, & \cdots, & A_{n-1}^{n} \\ A_{n-2}^{1}, & A_{n-2}^{2}, & \cdots, & A_{n-2}^{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{0}^{1}, & A_{0}^{2}, & \cdots, & A_{0}^{n} \end{vmatrix}.$$

所以

$$B_N=\frac{(n!)^n(n-1)!\cdots 2!1!}{(N+1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}(2n-1)!\cdots n!}$$

$$\cdot\frac{((2n)!)^n}{(2n)!\cdots(n+1)!(n-1)!\cdots 1!}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

$$\cdot\begin{vmatrix} C_{n}^{n+(N+1)-1}, & C_{n}^{n+(N+1)-2}, & \cdots, & C_{n}^{n+(N+1)-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n}^{n+(N+1)(n-1)-1}, & C_{n}^{n+(N+1)(n-1)-2}, & \cdots, & C_{n}^{n+(N+1)(n-1)-n} \\ C_{n}^{n+(N+1)n-1}, & C_{n}^{n+(N+1)n-2}, & \cdots, & C_{n}^{n+(N+1)n-n} \end{vmatrix}. \tag{2.7.3}$$

记 (2.7.3) 的右边的行列式为 Δ，那么 (2.7.3) 就是

$$B_N=\frac{(n!)^{n-1}((2n)!)^{n-1}\Delta}{(N+1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}((2n-1)!\cdots(n+1)!)^2}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right). \tag{2.7.4}$$

对 Δ 进行计算，由于

$$\sum_{s=0}^{p}C_{l}^{l+s}=C_{l+1}^{l+p+1},$$

所以 (2.7.4) 中的 Δ 成为

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{(N+1)-1} C_{n-1}^{n-1+k}, & \sum_{k=0}^{(N+1)-2} C_{n-1}^{n-1+k}, & \cdots, & \sum_{k=0}^{(N+1)-n} C_{n-1}^{n-1+k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum_{k=0}^{n(N+1)-1} C_{n-1}^{n-1+k}, & \sum_{k=0}^{n(N+1)-2} C_{n-1}^{n-1+k}, & \cdots, & \sum_{k=0}^{n(N+1)-n} C_{n-1}^{n-1+k} \end{vmatrix}.$$

相邻行相减，得到

$$\begin{vmatrix} C_{n-1}^{n-1+(N+1)-1}, & C_{n-1}^{n-1+(N+1)-2}, & \cdots, & C_{n-1}^{n-1+(N+1)-n+1}, & C_n^{N+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ C_{n-1}^{n-1+n(N+1)-1}, & C_{n-1}^{n-1+n(N+1)-2}, & \cdots, & C_{n-1}^{n-1+n(N+1)-n+1}, & C_n^{(N+1)n} \end{vmatrix}.$$

继续进行这个步聚，最后得到

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_1^{N+1}, & \cdots, & C_{n-1}^{N+1}, & C_n^{N+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ C_1^{(n-1)(N+1)}, & \cdots, & C_{n-1}^{(n-1)(N+1)}, & C_n^{(n-1)(N+1)} \\ C_1^{n(N+1)}, & \cdots, & C_{n-1}^{n(N+1)}, & C_n^{n(N+1)} \end{vmatrix}.$$

应用以往惯用的技巧，Δ 等于

$$\frac{n!(N+1)^n}{n!(n-1)!\cdots 1!}\lim_{x\to 1}\begin{vmatrix} x^{(N+1)-1}, & \cdots, & (x^{(N+1)-1})^{(n-1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x^{(n-1)(N+1)-1}, & \cdots, & (x^{(n-1)(N+1)-1})^{(n-1)} \\ x^{n(N+1)-1}, & \cdots, & (x^{n(N+1)-1})^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n!(N+1)^n(n-1)!\cdots 1!}{n!(n-1)!\cdots 1!}$$

$$\lim_{\substack{x_1\to 1\\ \cdots \\ x_n\to 1}} \cdot \begin{vmatrix} x_1^{(N+1)-1}, & \cdots, & (x_1^{(N+1)-1})^{(n-1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_{n-1}^{(n-1)(N+1)-1}, & \cdots, & (x_{n-1}^{(n-1)(N+1)-1})^{(n-1)} \\ x_n^{n(N+1)-1}, & \cdots, & (x_n^{n(N+1)-1})^{(n-1)} \end{vmatrix} \frac{1}{D(x_1,\cdots,x_n)}$$

$$= (N+1)^n N(nN,(n-1)N,\cdots,N)$$

$$= (N+1)^n(N+1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} = (N+1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}. \tag{2.7.5}$$

于是，最后从 (2.7.4) 得到

定理 2.7.1 当 $N \geqslant n-1$ 时，有

$$B_N = \frac{(n!)^{n-1}((2n)!)^{n-1}}{((2n-1)!\cdots(n+1)!)^2}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right). \quad (2.7.6)$$

由上述定理及 (2.6.7)，我们有

定理 2.7.2 当 $N \geqslant n-1$ 时，有

$$B_{f_1\cdots f_n} = \frac{(2n)!\cdots 2!1!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)}{N(f)((2n)!)^n n!(N+1)^{n^2}}$$

$$\cdot \sum_{\substack{s_1=0\\k_1\geqslant 0}}^{2n} \cdots \sum_{\substack{s_n=0\\k_n\geqslant 0}}^{2n} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} C_{s_1}^{2n} C_n^{n+k_1} \cdots C_{s_n}^{2n} C_n^{n+k_n}$$

$$\cdot N((N+1)s_1-f_1, \cdots, (N+1)s_n-f_n). \quad (2.7.7)$$

从 $N(f)$ 的定义及定理 2.7.2 还可以看出

$$B_{f_1\cdots f_n} = 1 + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

§2.8 几点注记

(1) 这一章中的 Riesz 型定理(定理 2.3.1)的条件“$u(U)$ 在酉群 U_n 上连续”可以减弱为“$u(U)$ 在 U_n 上可积且有界”．此时，$\sum_N^\alpha(U)$ 在 $u(U)$ 连续的那些点上，当N趋于无穷时，还是趋于 $u(U)$，即 Riesz 求和是局部性质．

(2) 华罗庚在[2]中定义了 Abel 求和(见第一章)，并且证明了：若 $u(U)$ 在 U_n 上连续，则 $u(U)$ 可以 Abel 求和于它自己．从而得到了一条收敛定理(定理 1.3.1)．当 r 充分靠近 1 时，我们可以将 Abel 和

$$\sum_{N\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant -N} \rho^f(r)\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U))$$

作为 $u(U)$ 的近似值．但在这近似值中含参数 r．本文中的 Riesz 型定理又一次地得到了一条收敛定理且作为 $u(U)$ 的近似值的 (C,α) 和 (2.2.1) 是不含有 r 的．

(3) Riesz 型定理(定理 2.3.1)中的条件 $\alpha > \frac{n-1}{n}$ 是否可以

再往前推进？当 $n=1$ 时，这个结果，众所周知不能推进；当 $n>1$ 时能否前进？这是一个值得研究的问题。

(4) 从 Riesz 型定理(定理 2.3.1)的证明过程中，我们可以得出一条更一般的收敛定理，这将在以后第四章中证述之，并将它应用于紧致群上的逼近理论。

第三章　酉群上 Fourier 级数的部分和

§ 3.1　Dirichlet 核

考虑可积函数 $u(U)$ 的 Fourier 级数

$$\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)) \tag{3.1.1}$$

的部分和

$$s_N^{(n)}(U)=\sum_{N>l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant -N} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)), \tag{3.1.2}$$

这里

$$l_1=f_1+n-1,\ l_2=f_2+n-2,\ \cdots,\ l_n=f_n.$$

我们将要证明(龚升[1]):

定理 3.1.1　可积函数 $u(U)$ 的 Fourier 级数 (3.1.1) 的部分和 (3.1.2) 可以表为

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU)\mathscr{D}_N(V)\dot{V},$$

这里 $\mathscr{D}_N(V)$ 是 Dirichlet 核，它等于

$$\frac{1}{(n-1)!\cdots 2!1!D(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_n)}$$

$$\cdot D\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\right)\cdot\frac{\det(\bar{V}'^N-V^{N+1})}{\det(I-V)}, \tag{3.1.3}$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 V 的特征根，而 D 为 Vandermonde 行列式，$D\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\right)$ 表示算子

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ \frac{\partial}{\partial\lambda_1}, & \frac{\partial}{\partial\lambda_2}, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial\lambda_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\right)^{n-1}, & \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right)^{n-1}, & \cdots, & \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\right)^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{3.1.4}$$

证 首先从 §0.2，(3.1.1) 就是

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU)\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V})\dot{V}. \tag{3.1.5}$$

所以，(3.1.2) 就是

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU)\sum_{N\geqslant f_1>f_2>\cdots>f_n\geqslant -N} N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V})\dot{V}.$$

我们来计算

$$\sum_{N\geqslant f_1>f_2>\cdots>f_n\geqslant -N} N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V}).$$

从 (1.3.2) 及 (3.1.5) 知道，所谓级数 (3.1.1) 的 Abel 求和就是

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU)\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n} \rho^f(r)N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V})\dot{V}. \tag{3.1.6}$$

由 [2] 及 (3.1.6) 知道

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n} \rho^f(r)N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V}) = \frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I-r\overline{V}')|^{2n}}.$$

于是从 $\chi_f(\overline{V})$ 的定义，我们知道，若 $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$ ($\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n$) 是 $\overline{V}$ 的特征根，那么

$$\frac{1}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n}\rho^f(r)N(f)M_{f_1\cdots f_n}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})$$

$$=\frac{(1-r^2)^{n^2}}{|1-re^{i\theta_1}|^{2n}\cdots|1-re^{i\theta_n}|^{2n}},$$

这里

$$M_{f_1\cdots f_n}(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1} \\ x_1^{l_2}, & \cdots, & x_n^{l_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n} \end{vmatrix}$$

考虑 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 的函数

$$g(\theta_1, \cdots, \theta_n) = \frac{D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})(1-r^2)^{n^2}}{|1-re^{i\theta_1}|^{2n}\cdots|1-re^{i\theta_n}|^{2n}}, \quad (3.1.7)$$

将它展开成多重 Fourier 级数

$$\sum_{\infty>\nu_1,\cdots,\nu_n>-\infty} a_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} e^{i(\nu_1\theta_1+\cdots+\nu_n\theta_n)}. \quad (3.1.8)$$

研究它的部分和

$$\sum_{\nu_1=-N}^{N}\cdots\sum_{\nu_n=-N}^{N} a_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} e^{i(\nu_1\theta_1+\cdots+\nu_n\theta_n)} = \frac{1}{(2\pi)^n}$$

$$\cdot\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} g(\psi_1,\cdots,\psi_n)\prod_{j=1}^{n} d_N(\psi_j-\theta_j)d\psi_1\cdots d\psi_n, \quad (3.1.9)$$

这里

$$d_N(\theta) = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta},$$

即是一个变数的 Dirichlet 核。

由于

$$\frac{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})(1-r^2)^{n^2}}{|1-re^{i\theta_1}|^{2n}\cdots|1-re^{i\theta_n}|^{2n}}$$

$$= \sum_{l_1>\cdots>l_n} \rho^l(r)N(l)\cdot\left[\sum_{\mu}\delta^{1,2,\cdots,n}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} e^{i(l_{\mu_1}\theta_1+l_{\mu_2}\theta_2+\cdots+l_{\mu_n}\theta_n)}\right]$$

$$= \sum_{\infty>\nu_1,\cdots,\nu_n>-\infty} a_{\nu_1\cdots\nu_n} e^{i(\nu_1\theta_1+\cdots+\nu_n\theta_n)},$$

可以看出，(3.1.9) 的左边就是

$$\sum_{N\geq l_1>l_2>\cdots>l_n\geq -N} \rho^l(r)N(l)M_{l_1\cdots l_n}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}). \quad (3.1.10)$$

于是

$$\sum_{N\geq l_1>l_2>\cdots>l_n\geq -N} \rho^l(r)N(l)\chi_{l_1\cdots l_n}([e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}])$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{D(e^{i\phi_1},\cdots,e^{i\phi_n})(1-r^2)^{n^2}}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})\prod_{\nu=1}^{n}|1-re^{i\phi_\nu}|^{2n}}$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{n}d_N(\phi_j-\theta_j)d\phi_1\cdots d\phi_n. \tag{3.1.11}$$

应用以前一再使用的积分技巧，可以证明，(3.1.11) 的右边就是

$$\frac{(1-r^2)^{n^2}}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})(2\pi)^n}\cdot\int\cdots\int_{2\pi\geqslant\phi_1\geqslant\phi_2\geqslant\cdots\geqslant\phi_n\geqslant 0}\frac{D(e^{i\phi_1},\cdots,e^{i\phi_n})}{\prod_{j=1}^{n}|1-re^{i\phi_j}|^{2n}}$$

$$\cdot P(\phi_1,\cdots,\phi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n)d\phi_1\cdots d\phi_n, \tag{3.1.12}$$

而 $P(\phi_1,\cdots,\phi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 是

$$\begin{vmatrix} d_N(\phi_1-\theta_1), & \cdots, & d_N(\phi_1-\theta_n) \\ d_N(\phi_2-\theta_1), & \cdots, & d_N(\phi_2-\theta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_N(\phi_n-\theta_1), & \cdots, & d_N(\phi_n-\theta_n) \end{vmatrix}.$$

将(3.1.12)的右边的积分对酉群的旁系积分，于是得到

$$\frac{1}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})C}\int_{U_n}\frac{(1-r^2)^{n^2}P(\phi_1,\cdots,\phi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n)}{|\det(I-r\overline{W}')|^{2n}D(e^{-i\phi_1},\cdots,e^{-i\phi_n})}\dot{W}. \tag{3.1.13}$$

让 $r\to 1$，于是 $\rho^l(r)\to 1$. 这样，(3.1.10) 就是 $s_N^{(n)}(U)$，而 (3.1.13)，根据调和函数理论，当 $r\to 1$ 时，这就是

$$\frac{1}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\lim_{\substack{\phi_1\to 0\\ \cdots\\ \phi_n\to 0}}\frac{P(\phi_1,\cdots,\phi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n)}{D(\phi_1,\cdots,\phi_n)}, \tag{3.1.14}$$

而这就是

$$\frac{1}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\lim_{\substack{\phi_1\to 0\\ \cdots\\ \phi_n\to 0}}\frac{P(\phi_1,\cdots,\phi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n)}{D(\phi_1,\cdots,\phi_n)}$$

$$\cdot\frac{D(\phi_1,\cdots,\phi_n)}{D(e^{-i\phi_1},\cdots,e^{-i\phi_n})}. \tag{3.1.15}$$

应用[1]中的定理 1.2.4，即得：$\mathscr{D}_N(V)$ 等于

$$\frac{i^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(n-1)!\cdots 2!1!D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\begin{vmatrix} d_N(\theta_1), & \cdots, & d_N(\theta_n) \\ d'_N(\theta_1), & \cdots, & d'_N(\theta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_N^{(n-1)}(\theta_1), & \cdots, & d_N^{(n-1)}(\theta_n) \end{vmatrix}. \tag{3.1.16}$$

从 (3.1.16) 及 $D\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\right)$ 的定义 (3.1.4)，立刻可以得到 (3.1.3)，或是直接从 (3.1.14) 出发，应用[1]中的定理 1.2.4 也可得到 (3.1.3).

§ 3.2 Dirichlet 核的代数证明

这一节的内容是叙述华罗庚的结果. 作者证明了定理 3.1.1 之后，华罗庚给出了一个如下的简单的代数证明，而且他的证明并不依赖于 Poisson-华核.

由定义，我们知道，

$$\sum_{N\geq l_1>l_2>\cdots>l_n\geq -N} N(f)\, M_{f_1\cdots f_n}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sum_{N\geq l_1>l_2>\cdots>l_n\geq -N}\begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ l_1, & l_2, & \cdots, & l_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_1^{n-1}, & l_2^{n-1}, & \cdots, & l_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} \lambda_1^{l_1}, & \cdots, & \lambda_n^{l_1} \\ \lambda_1^{l_2}, & \cdots, & \lambda_n^{l_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{l_n}, & \cdots, & \lambda_n^{l_n} \end{vmatrix}\frac{1}{D(n-1,\cdots,1,0)}, \tag{3.2.1}$$

这里 $\lambda_1=e^{i\theta_1}$, $\lambda_2=e^{i\theta_2}$, $\cdots$, $\lambda_n=e^{i\theta_n}$.

由于行列式展开的对称性，将 $(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ 进行另外一种排列，(3.2.1) 的右边的值不变，所以

$$\sum_{N\geq l_1>l_2>\cdots>l_n\geq -N} N(f)\, M_{f_1\cdots f_n}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})$$

$$
= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n!} \sum_{l_1=-N}^{N} \cdots \sum_{l_n=-N}^{N} \begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ l_1, & l_2, & \cdots, & l_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_1^{n-1}, & l_2^{n-1}, & \cdots, & l_n^{n-1} \end{vmatrix}
$$

$$
\cdot \begin{vmatrix} \lambda_1^{l_1}, & \cdots, & \lambda_n^{l_1} \\ \lambda_1^{l_2}, & \cdots, & \lambda_n^{l_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{l_n}, & \cdots, & \lambda_n^{l_n} \end{vmatrix} \frac{1}{D(n-1, \cdots, 1, 0)}
$$

$$
= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n!} \sum_{l_1=-N}^{N} \cdots \sum_{l_n=-N}^{N} \frac{1}{D(n-1, \cdots, 1, 0)}
$$

$$
\cdot \begin{vmatrix} a_{11}(\lambda), & a_{12}(\lambda), & \cdots, & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda), & a_{22}(\lambda), & \cdots, & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(\lambda), & a_{n2}(\lambda), & \cdots, & a_{nn}(\lambda) \end{vmatrix} \tag{3.2.2}
$$

这里 $a_{ij}(\lambda) = l_1^{j-1}\lambda_i^{l_1} + l_2^{j-1}\lambda_i^{l_2} + \cdots + l_n^{j-1}\lambda_i^{l_n}$.

将(3.2.2)的右边的分子拆成 n^n 个行列式，那么这些行列式都成为如下的形式：

$$
\sum_{l_1=-N}^{N} \cdots \sum_{l_n=-N}^{N} \begin{vmatrix} \lambda_1^{l_{\nu_1}}, & \lambda_2^{l_{\nu_1}}, & \cdots, & \lambda_n^{l_{\nu_1}} \\ l_{\nu_2}\lambda_1^{l_{\nu_2}}, & l_{\nu_2}\lambda_2^{l_{\nu_2}}, & \cdots, & l_{\nu_2}\lambda_n^{l_{\nu_n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{\nu_n}^{n-1}\lambda_1^{l_{\nu_n}}, & l_{\nu_n}^{n-1}\lambda_2^{l_{\nu_n}}, & \cdots, & l_{\nu_n}^{n-1}\lambda_n^{l_{\nu_n}} \end{vmatrix}, \tag{3.2.3}
$$

这里 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ 是在 $1, 2, \cdots, n$ 中取值．显然，(3.2.3)中所有的行列式都等于零，除了 $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列．于是

$$
\sum_{N \geq l_1 > \cdots > l_n \geq -N} N(f) M_{l_1 \cdots l_n}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}
$$

$$
\cdot \sum_{l=-N}^{N} \cdots \sum_{l_n=-N}^{N} \begin{vmatrix} \lambda_1^{l_1}, & \lambda_2^{l_1}, & \cdots, & \lambda_n^{l_1} \\ l_2\lambda_1^{l_2}, & l_2\lambda_2^{l_2}, & \cdots, & l_n\lambda_n^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_n^{n-1}\lambda_1^{l_n}, & l_n^{n-1}\lambda_2^{l_n}, & \cdots, & l_n^{n-1}\lambda_n^{l_n} \end{vmatrix} \frac{1}{D(n-1, \cdots, 1, 0)}
$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{D(n-1,\cdots,1,0)}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \sum_{-N}^{N} \lambda_1^l, & \sum_{-N}^{N} \lambda_2^l, & \cdots, & \sum_{-N}^{N} \lambda_n^l \\ \sum_{-N}^{N} l\lambda_1^l, & \sum_{-N}^{N} l\lambda_2^l, & \cdots, & \sum_{-N}^{N} l\lambda_n^l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{-N}^{N} l^{n-1}\lambda_1^l, & \sum_{-N}^{N} l^{n-1}\lambda_2^l, & \cdots, & \sum_{-N}^{N} l\lambda_n^l \end{vmatrix}$$

$$= \frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{D(n-1,\cdots,1,0)}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} d_N(\theta_1), & d_N(\theta_2), & \cdots, & d_N(\theta_n) \\ d'_N(\theta_1), & d'_N(\theta_2), & \cdots, & d'_N(\theta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_N^{(n-1)}(\theta_1), & d_N^{(n-1)}(\theta_2), & \cdots, & d_N^{(n-1)}(\theta_n) \end{vmatrix}.$$

这就证明了定理 3.1.1. 显然，这个证明比起 §3.1 中的证明来要简洁而直接，在第八章中，用此方法算出了 $SO(n)$ 上的 Fourier 级数的 Dirichlet 核，而 §3.1 中的证明方法是一种处理矩阵积分的有用方法.

§ 3.3 Fourier 级数的部分和

已经知道，若 $u(U)$ 为 n 阶酉群 U_n 上的可积函数，它的 Fourier 级数

$$\sum_{f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n} \Phi'_{f_1\cdots f_n}(U))$$

的部分和

$$s_N^{(n)}(U) = \sum_{N \geqslant l_1 > l_2 > \cdots > l_n \geqslant -N} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n} \Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)) \qquad (3.3.1)$$

可以表为

$$\frac{1}{C} \int_{U_n} u(VU) \mathscr{D}_N(V) \dot{V}, \qquad (3.3.2)$$

这里 $\mathscr{D}_N(V)$ 为 Dirichlet 核，如 (3.1.3) 所表示的那样，为方便起见，用 (3.1.16)。设 $\bar{V}$ 表为

$$\bar{V} = W\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}\overline{W}',$$

这里 $W \in U_n$。取 $\Gamma \in U_n$ 使

$$\Gamma\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}\Gamma' = \begin{pmatrix} e^{i\theta_{v_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_{v_n}} \end{pmatrix},$$

这里 $(v_1, \cdots, v_n)$ 为 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列. 记

$$\bar{V}^* = W\Gamma\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}\Gamma'\overline{W}'.$$

由群上积分的定义知道

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(V^*U)\mathscr{D}_N(V)\dot{V} = \frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU)\mathscr{D}_N(V)\dot{V}.$$

作所有可能的 V^*，将所有的 $u(V^*U)$ 加起来，除以 $n!$，记之为 $u^*(VU)$，于是

$$s_N^{(n)}(U) = \frac{1}{C}\int_{U_n} u^*(VU)\mathscr{D}_N(V)\dot{V}. \qquad (3.3.3)$$

记

$$g(\theta_1, \cdots, \theta_n) = \frac{1}{\omega_n'}\int_{[V]} u^*(VU)[\dot{V}], \qquad (3.3.4)$$

于是得到，$s_N^{(n)}(U)$ 等于

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\pi > \theta_1 > \cdots > \theta_n > -\pi} g(\theta_1, \cdots, \theta_n)\mathscr{D}_N(V) \cdot |D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

由 $u^*(U)$ 的定义，$g(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ 是 $\theta_1, \cdots, \theta_n$ 的对称函数，于是，应用以前惯用的技巧，$s_N^{(n)}(U)$ 等于

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi)^n(n-1)!\cdots 2!1!}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} g(\theta_1, \cdots, \theta_n)$$

$$\cdot D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})d_N(\theta_1)\cdot d_N'(\theta_2)\cdots d_N^{(n-1)}(\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{3.3.5}$$

可以证明

$$\frac{1}{C}\int_{U_n}\mathscr{D}_N(V)\dot{V}=1. \tag{3.3.6}$$

事实上，

$$\frac{1}{C}\int_{U_n}\mathscr{D}_N(V)\dot{V}$$

等于

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi)^n(n-1)!\cdots 2!1!}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})$$

$$\cdot d_N(\theta_1)d_N'(\theta_2)\cdots d_N^{(n-1)}(\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{3.3.7}$$

进行 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次分部积分，考虑到周期性，即得 (3.3.7) 就是

$$\frac{(-i)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi)^n(n-1)!\cdots 2!1!}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}d_N(\theta_1)\cdots d_N(\theta_n)$$

$$\cdot\frac{\partial^0}{\partial\theta_1^0}\frac{\partial^1}{\partial\theta_2^1}\cdots\frac{\partial^{n-1}}{\partial\theta_n^{n-1}}D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

而上式表示函数

$$\frac{(-i)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!\cdots 2!1!}\frac{\partial^0}{\partial\theta_1^0}\frac{\partial^1}{\partial\theta_2^1}\cdots\frac{\partial^{n-1}}{\partial\theta_n^{n-1}}D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})$$

的多重 Fourier 级数的第 N 项的部分和在 $\theta_1=\cdots=\theta_n=0$ 处的值，从 D 的定义，显然这等于 1。

从 (3.3.2) 及 (3.3.1) 得到，$s_N^{(n)}(U)-u(U)$ 等于

$$\frac{1}{C}\int_{U_n}(u^*(VU)-u(U))\mathscr{D}_N(V)\dot{V}.$$

而从 (3.3.5) 及 (3.3.7) 得到，上式又等于

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi)^n(n-1)!\cdots 2!1!}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}(g(\theta_1,\cdots,\theta_n)-u(U))$$

$$\cdot D(e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}) d_N(\theta_1) d_N'(\theta_2) \cdots d_N^{(n-1)}(\theta_n) d\theta_1 \cdots d\theta_n. \tag{3.3.8}$$

§ 3.4 Fourier 级数的收敛定理

设 $0 < p < 1$. 若在 U_n 上定义的函数 $u(U)$ 连续，且

$$|u(U) - u(V)| \leqslant A(\mathrm{tr}(U - V)(\overline{U - V}))^p,$$

这里 A 是一绝对常数，则称 $u(U)$ 满足 Lipschtz 条件. 其全体函数类记为 $C^p(U_n)$，而具有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 阶连续微商的函数类记为 $C^{\frac{n(n+1)}{2}}(U_n)$.

若 $u(U) \in C^{\frac{n(n-1)}{2}}(U_n)$，那么，进行 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次分部积分，并考虑到周期性，从 (3.3.8) 得到，$s_N^{(n)}(U) - s_N^{(n)}(V)$ 等于

$$\frac{(-i)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi)^n (n-1)! \cdots 2!1!} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{\partial^0}{\partial\theta_1^0} \frac{\partial^1}{\partial\theta_2^1} \cdots \frac{\partial^{n-1}}{\partial\theta_n^{n-1}}$$
$$\cdot [(g(\theta_1, \cdots, \theta_n) - u(U)) D(e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n})]$$
$$\cdot d_N(\theta_1) d_N(\theta_2) \cdots d_N(\theta_n) d\theta_1 \cdots d\theta_n. \tag{3.4.1}$$

记 $I_{\mu_1 \cdots \mu_n}$ 为

$$\frac{(-i)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi)^n (n-1)! \cdots 2!1!} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{\mu_1}}{\partial\theta_1^{\mu_1}} \frac{\partial^{\mu_2}}{\partial\theta_2^{\mu_2}} \cdots \frac{\partial^{\mu_n}}{\partial\theta_n^{\mu_n}}$$
$$\cdot (g(\theta_1, \cdots, \theta_n) - u(U)) \frac{\partial^{\nu_1}}{\partial\theta_1^{\nu_1}} \frac{\partial^{\nu_2}}{\partial\theta_2^{\nu_2}} \cdots \frac{\partial^{\nu_n}}{\partial\theta_n^{\nu_n}}$$
$$\cdot D(e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}) d_N(\theta_1) \cdots d_N(\theta_n) d\theta_1 \cdots d\theta_n, \tag{3.4.2}$$

这里 μ_k, ν_k 为非负整数，满足

$$\mu_k + \nu_k = k - 1,$$
$$\mu_k \geqslant 0, \nu_k \geqslant 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

于是

$$s_N^{(n)}(U) - u(U) = \sum_{\mu_1, \cdots, \mu_n} I_{\mu_1 \cdots \mu_n}.$$

先考虑 $I_{0, \cdots, 0}$. 由定义，$I_{0, \cdots, 0}$ 等于

$$\frac{(-i)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi)^n(n-1)!\cdots 2!1!}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}(g(\theta_1,\cdots,\theta_n)-u(U))$$

$$\cdot\frac{\partial^0}{\partial\theta_1^0}\frac{\partial^1}{\partial\theta_2^1}\cdots\frac{\partial^{n-1}}{\partial\theta_n^{n-1}}D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})\cdot d_N(\theta_1)\cdots d_N(\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{3.4.3}$$

考虑积分区域

$$\pi\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi.$$

将这个区域如同在 §1.3 中所进行的那样划分为 $R_1,R_2,\cdots,R_{n+1}$. 记积分区域为 R_j 的积分 (3.4.3) 为 I_j. 先看 I_2. 由于(参阅 Натансон[1]，陈建功[1])

$$\int_\delta^\pi f(t)d_N(t)dt=O\left(\frac{1}{\delta}\omega\left(\frac{1}{N}\right)\right),$$

这里 $\delta>0$, ω 为 f 的连续模，及

$$\int_{-\pi}^{\pi}|d_N(\theta)|d\theta=O(\ln N),$$

所以

$$I_2=O\left(\frac{1}{\delta}\omega\left(\frac{1}{N}\right)\ln^{n-1}N\right).$$

由于 $u(U)\in C^{\frac{n(n-1)}{2}}$，所以当 $n>1$ 时

$$I_2=O\left(\frac{1}{\delta N}\ln^{n-1}N\right).$$

同样可以证明

$$I_p=O\left(\frac{1}{\delta^{p-1}N}\ln^{n-p+1}N\right),\quad p=2,3,\cdots,n+1.$$

将 R_1 再如同 §1.5 中所进行的那样划分为 $s_1,\cdots,s_{n+1}$. 记积分区域为 s_j 的积分 (3.4.3) 为 J_j. 与前面一样，可以证明

$$J_p=O\left(\frac{1}{\delta^{p-1}N}\ln^{n-p+1}N\right),\quad p=2,3,\cdots,n+1.$$

最后考虑 J_1. 由于 $\delta\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta$,

$$|g(\theta_1,\cdots,\theta_n)-u(U)|=\omega(u,\delta),$$

这里 ω 为 $u(U)$ 的连续模，因此，

$$J_1 = O(\omega(u, \delta)\ln^n N).$$

所以积分区域在

$$\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi$$

的积分 (3.4.3) 为

$$O(\delta\ln^n N) + O\left(\frac{1}{\delta N}\ln^{n-1}N\right) + \cdots +$$

$$\cdot O\left(\frac{1}{\delta^{p-1}N}\ln^{n-p+1}N\right) + \cdots + O\left(\frac{1}{\delta^n N}\right).$$

在其它区域上也一样处理，以至得到 $I_{0,\cdots,0}$ 等于

$$O(\delta\ln^n N) + O\left(\frac{1}{\delta N}\ln^{n-1}N\right) + \cdots + O\left(\frac{1}{\delta^n N}\right).$$

取 $\delta = (N\ln^n N)^{\frac{-1}{n+1}}$，于是

$$I_{0,\cdots,0} = O(N^{\frac{-1}{n+1}}\ln^{\frac{n}{n+1}}N).$$

再来研究 $I_{\mu_1,\cdots,\mu_n}$. 当 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 不全为零时，由于 $0 \leqslant \mu_k \leqslant k-1$，且不能全为零，所以至少有两个 $\nu_j (j=1,2,\cdots,n)$ 是相等的. 例如 $\nu_j = \nu_k$. 由 $D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})$ 的定义知道.

$$\xi = \frac{\partial^{\nu_1}}{\partial\theta_1^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial^{\nu_n}}{\partial\theta_n^{\nu_n}}D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})$$

有因子 $(e^{-i\theta_j} - e^{-i\theta_k})$. 因此，

$$\xi = (e^{-i\theta_j} - e^{-i\theta_k})F(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n}).$$

而

$$e^{-i\theta_j} - e^{-i\theta_k} = (1 - e^{-i\theta_k}) - (1 - e^{-i\theta_j}).$$

因而 $I_{\mu_1,\cdots,\mu_n}$ 等于

$$\frac{(-i)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi)^n(n-1)!\cdots 2!1!}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{\partial^{\mu_1}}{\partial\theta_1^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial^{\mu_n}}{\partial\theta_n^{\mu_n}}(g(\theta_1,\cdots,\theta_n) - u(U))$$

$$\cdot[(1 - e^{-i\theta_k}) - (1 - e^{-i\theta_j})]F(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})d_N(\theta_1)\cdots d_N(\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

若 $u(U) \in C^{\frac{n(n-1)}{2}+p}(U_n)$ $(0 < p < 1)$，而 $F(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})$

显然是可以微商的，因此

$$I_{\mu_1\cdots\mu_n}=O\left(\frac{1}{N^p}\ln^{n-1}N\right).$$

于是得到 $s_N^{(n)}(U)$ 是收敛的，且收敛于 $u(U)$。

于是有(龚升[3])

定理 3.4.1 设 $u(U)\in C^{\frac{n(n-1)}{2}+p}(U_n)$ $(0<p<1)$，那么 $u(U)$ 的 Fourier 级数的部分和 (3.3.3) 是收敛的，且收敛于 $u(U)$，而且有

$$|s_N^{(n)}(U)-u(U)|\leqslant A\max\left[\left(\frac{\ln^{n^2}N}{N}\right)^{\frac{1}{n+1}},\ \frac{1}{N^p}\ln^{n-1}N\right],$$

这里 A 为绝对常数。

§3.5 求和法的另一种定义及它的核

前面用来求出 Dirichlet 核的方法，立刻建议对于酉群 U_n 上可积函数的 Fourier 级数可以作出一个一般的求和法来，并可以写出相应的核来.

设 $u(\theta)$ 是在 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上可积函数，它的 Fourier 级数是

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_p e^{ip\theta}. \tag{3.5.1}$$

T 是一种求和法，即求和

$$\tau_m=\sum_{-\infty}^{\infty} u_{mp}a_p e^{ip\theta},$$

它的核是

$$k_m(\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty} u_{mp}e^{ip\theta}. \tag{3.5.2}$$

(当然假定核是存在的，即 (3.5.2) 是收敛的). 若当 m 趋于极限时，$\tau_m\to s$，那么 (3.5.1) 称为可以 T 求和，其和为 s .

由此给出 U_n 上可积函数的 Fourier 级数的一种求和法.

定义 3.5.1 设 $u(U)$ 为 U_n 上可积函数，它的 Fourier 级数

为

$$\sum_{l_1\geqslant\cdots\geqslant l_n}\operatorname{tr}(C_{l_1\cdots l_n}\Phi'_{l_1\cdots l_n}(U)).\tag{3.5.3}$$

作和

$$\tau_m=\sum_{l_1\geqslant\cdots\geqslant l_n}u_{ml_1}u_{ml_2}\cdots u_{ml_n}\operatorname{tr}(C_{l_1\cdots l_n}\Phi'_{l_1\cdots l_n}(U)).$$

若当 m 趋于极限时，$\tau_m\to s$，那么称 (3.5.3) 可以 T 求和，其和为 s。

例 3.5.1 (α 次 Cesàro 求和，$\alpha>-1$)

$$\tau_N=\sum_{N\geqslant l_1\geqslant\cdots\geqslant l_n\geqslant -N}A^{\alpha}_{l_1}\cdots A^{\alpha}_{l_n}\operatorname{tr}(C_{l_1\cdots l_n}\Phi'_{l_1\cdots l_n}(U)),$$

这里

$$A^{\alpha}_{l_j}=\frac{\Gamma(\alpha+N-|l_j|+1)\,\Gamma(N+1)}{\Gamma(\alpha+N+1)\,\Gamma(N-|l_j|+1)}.$$

例 3.5.2 (Abel-Poisson 求和)

$$\tau_r=\sum_{l_1\geqslant l_2\geqslant\cdots\geqslant l_n}r^{|l_1|+\cdots+|l_n|}\operatorname{tr}(C_{l_1\cdots l_n}\Phi'_{l_1\cdots l_n}(U)).$$

应用证明定理 3.1.1 的方法，可以证明如下的

定理 3.5.1 由定义 3.5.1 所给出的 T 求和法的核 $\mathrm{K}_m(V)$ 为

$$\frac{1}{(n-1)!\cdots 2!1!}\frac{D\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\right)}{D(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}k_m(\theta_1)\cdots k_m(\theta_n),\tag{3.5.4}$$

这里 $\lambda_1=e^{-i\theta_1},\cdots,\lambda_n=e^{-i\theta_n}$ 是 $\bar V$ 的特征根，D 为 Vandermonde 行列式，$k_m(\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty}u_{mp}e^{ip\theta}$ 是一个变数的 Fourier 级数的 T 求和法的核。

证 已知 (3.1.7) 的多重 Fourier 级数为 (3.1.8)，求 (3.1.8) 的和

$$\sum_{\infty>\nu_1,\cdots,\nu_n>-\infty}a_{\nu_1\cdots\nu_n}u_{m\nu_1}u_{m\nu_2}\cdots u_{m\nu_n}e^{i(\nu_1\theta_1+\cdots+\nu_n\theta_n)}\tag{3.5.5}$$

这就是

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} g(\phi_1,\cdots,\phi_n)\prod_{j=1}^n k_m(\phi_j-\theta_j)d\phi_1\cdots d\phi_n,$$

这里 $k_m(\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty} u_{mp}e^{ip\theta}$, g 由 (3.1.7) 所定义。

可以看出，(3.5.5) 就是

$$\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n} u_{ml_1}\cdots u_{ml_n}\rho^f(r)N(f)M_{f_1\cdots f_n}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}).$$

因此，

$$\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n} u_{ml_1}\cdots u_{ml_n}\rho^f(r)N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}([e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}])$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{D(e^{i\phi_1},\cdots,e^{i\phi_n})(1-r^2)^{n^2}}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})\prod_{\nu=1}^n|1-re^{i\phi_\nu}|^{2n}}$$

$$\cdot\prod_{j=1}^n k_m(\phi_j-\theta_j)d\phi_1\cdots d\phi_n. \tag{3.5.6}$$

应用以往惯用的办法，(3.5.6) 的右边就是

$$\frac{(1-r^2)^{n^2}}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\phi_1>\cdots>\phi_n}\frac{D(e^{i\phi_1},\cdots,e^{i\phi_n})}{\prod_{j=1}^n|1-re^{i\phi_j}|^{2n}}$$

$$\cdot Q(\phi_1,\cdots,\phi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n)d\phi_1\cdots d\phi_n. \tag{3.5.7}$$

而 $Q(\phi_1,\cdots,\phi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 是

$$\begin{vmatrix} k_m(\phi_1-\theta_1), & \cdots, & k_m(\phi_1-\theta_n)\\ k_m(\phi_2-\theta_1), & \cdots, & k_m(\phi_2-\theta_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ k_m(\phi_n-\theta_1), & \cdots, & k_m(\phi_n-\theta_n)\end{vmatrix}.$$

将 (3.5.7) 对酉群的旁系积分，得到

$$\frac{1}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\frac{1}{C}\int_{U_n}\frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I-r\overline{W}')|^{2n}}$$

$$\cdot\frac{Q(\phi_1,\cdots,\phi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n)}{D(e^{-i\phi_1},\cdots,e^{-i\phi_n})}\dot{W}.$$

让 $r\to 1$，由于 $\rho^j(r)\to 1$，应用与§3.1 中一样的方法，即得定理 3.5.1。

当然定理 3.5.1 还可以用§3.2 中的方法给出一个代数的证明，这里从略。

例 3.5.3 α 次 Cesàro 核 $(\alpha>-1)$ $F_N^\alpha(V)$ 为

$$\frac{1}{(N+1)^n(n-1)!\cdots 2!1!D(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_n)}$$

$$D\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\right)\cdot\frac{\det\left[\sum_{k=0}^{N}A_{N-k}^{\alpha-1}V^k(I-\bar{V}'^{2k+1})\right]}{(2A_N^\alpha)^n\det(I-V)}.\tag{3.5.8}$$

（这与§2.2 中所定义的 Cesàro 核是不相同的）．特别是 Fejér 核为

$$\frac{1}{(N+1)^n(n-1)!\cdots 2!1!D(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_n)}$$

$$D\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\right)\cdot\left|\frac{\det(I-V^{N+1})}{\det(I-V)}\right|^2\tag{3.5.9}$$

（这与§2.2 中所定义的 Fejér 核也是不相同的）．

例 3.5.4 Poisson 核 $P_r(V)$ 为

$$\frac{1}{(n-1)!\cdots 2!1!}\,\frac{D\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\right)}{D(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_n)}\,\frac{(1-r^2)^n}{|\det(I-rV)|^2}\tag{3.5.10}$$

（这与§1.3 中所定义的 Poisson-华核是不相同的）．

从此定义及多重 Fourier 级数的结果（参阅 Zygmund [1]），立刻得到：若 $u(U)\in C^{\frac{n(n-1)}{2}}(U_n)$，那么它的 Fourier 级数可以在上述意义下 Abel 及 α 次 Cesàro 求和于它自己 $(\alpha>-1)$．

§3.6 Fourier 级数的绝对收敛

设 $u(U)$ 在 n 阶酉群 U_n 上可积，那么它有 Fourier 级数

(3.1.1)，这里

$$C_{f_1\cdots f_n}=\int_{U_n}u(V)\overline{\Phi_{f_1\cdots f_n}(V)}\dot{V},$$

$$\Phi_{f_1\cdots f_n}(U)=\sqrt{\frac{N(f)}{C}}A_{f_1\cdots f_n}(U),$$

而 $A_{f_1\cdots f_n}(U)$ 为 U 的标记为 $(f_1,\cdots,f_n)$ 的酉表示，于是有

$$C_f\overline{C}_f'=\iint u(V)u(U)\overline{\Phi_f(V)}\Phi_f'(U)\dot{V}\dot{U}$$

$$=\frac{N(f)}{C}\iint u(V)u(U)\overline{A_f(V)}A_f'(U)\dot{V}\dot{U}.$$

记 $U\overline{V}'=W$，于是得到

$$\operatorname{tr}(C_f\overline{C}_f')=\frac{N(f)}{C}\iint u(V)u(WV)\chi_f(W)\dot{W}\dot{V}.$$

记

$$g(W)=\int u(V)u(WV)\dot{V}.$$

于是

$$\operatorname{tr}(C_f\overline{C}_f')=\frac{N(f)}{C}\int g(W)\chi_f(W)\dot{W}.$$

设 W 的特征根为 $e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}$. 记

$$h(\theta_1,\cdots,\theta_n)=\frac{1}{\omega_n'}\int_{[\dot{W}]}g(W)[\dot{W}].$$

于是

$$\operatorname{tr}(C_f\overline{C}_f')=\frac{N(f)}{(2\pi)^n}\int_{\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n}\cdots\int h(\theta_1,\cdots,\theta_n)M_f(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})$$
$$\cdot D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

如同以前一样，用 h^* 来代替 h，并应用以往常用的技巧，得到，$\operatorname{tr}(C_f\overline{C}_f')$ 等于

$$\frac{N(f)}{(2\pi)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}h^*(\theta_1,\cdots,\theta_n)e^{i(l_1\theta_1+\cdots+l_n\theta_n)}$$
$$\cdot D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

记

$$H(\theta_1, \cdots, \theta_n) = h^*(\theta_1, \cdots, \theta_n) D(e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n})$$
$$= D(e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}) \frac{1}{\omega_n'} \int_{[\dot{W}]} \int_{U_n} u(V) u^*(WV) \dot{V} [\dot{W}]. \tag{3.6.1}$$

于是有

$$\frac{\operatorname{tr}(C_f \overline{C}_f')}{N(f)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} H(\theta_1, \cdots, \theta_n) \cdot e^{i(l_1\theta_1 + \cdots + l_n\theta_n)} d\theta_1 \cdots d\theta_n, \tag{3.6.2}$$

但 $l_1 > l_2 > \cdots > l_n$. 如果 $(i_1, \cdots, i_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列，那么容易看出

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} H(\theta_1, \cdots, \theta_n) e^{i(l_{i_1}\theta_1 + \cdots + l_{i_n}\theta_n)} d\theta_1 \cdots d\theta_n$$
$$= \delta_{i_1 i_2 \cdots i_n}^{12 \cdots n} \frac{\operatorname{tr}(C_f \overline{C}_f')}{N(f)}.$$

这样就得到，作为多变数可积函数 $H(\theta_1, \cdots, \theta_n)$，它的多重 Fourier 级数为

$$\sum_{l_1, \cdots, l_n} d_{l_1 \cdots l_n} e^{-i(l_1\theta_1 + \cdots + l_n\theta_n)}, \tag{3.6.3}$$

这里

$$d_{l_1 \cdots l_n} = \frac{\operatorname{tr}(C_f \overline{C}_f')}{N(f)}, \quad \text{若 } l_1 > l_2 > \cdots > l_n;$$
$$= 0, \quad \text{若 } l_1, \cdots, l_n \text{ 中至少有两个相同};$$
$$= \delta_{i_1 i_2 \cdots i_n}^{12 \cdots n} \frac{\operatorname{tr}(C_f \overline{C}_f')}{N(f)}, \quad \text{若 } (l_{i_1}, \cdots, l_{i_n}) \text{ 为 } (1, 2, \cdots, n) \text{ 的一个排列，且 } l_1 > l_2 > \cdots > l_n.$$

于是 (3.6.3) 可写成

$$\sum_{l_1 > \cdots > l_n} \frac{\operatorname{tr}(C_f \overline{C}_f')}{N(f)} M_{l_1 \cdots l_n}(e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}). \tag{3.6.4}$$

同样可以证明：函数 $D\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial\theta_n}\right) H(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ 的多重 Fourier 级数为

$$D(n-1,\cdots,1,0)\sum_{l_1>\cdots>l_n}(-i)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\cdot\operatorname{tr}(C_l\cdot\bar{C}_l')M_{l_1\cdots l_n}(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n}).\qquad(3.6.5)$$

设 $f(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 为 $-\pi\leqslant\theta_1,\cdots,\theta_n\leqslant\pi$ 中定义的连续函数，令

$$A^{(k)}(f;\theta_1,\cdots,\theta_n;h_1,\cdots,h_n)$$
$$=f(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1},\theta_k+h_k,\theta_k,\cdots,\theta_n-f(\theta_1,\cdots,\theta_n);$$
$$A^{(j,k)}(f;\theta_1,\cdots,\theta_n;h_1,\cdots,h_n)$$
$$=A^{(j)}(A^{(k)}(f;\theta_1,\cdots,\theta_n;h_1,\cdots,h_n));\ (j<k)$$

同样可定义 $A^{(j,k,l)}(f;\theta_1,\cdots,\theta_n;h_1,\cdots,h_n)$ $(j<k<l)$ 等等。记

$$A(f;\theta_1,\cdots,\theta_n;h_1,\cdots,h_n)$$
$$=A^{(1,2,\cdots,n)}(f;\theta_1,\cdots,\theta_n;h_1,\cdots,h_n).$$

分别称

$$\omega(f;\theta_1,\cdots,\theta_n;h_1,\cdots,h_n)$$
$$=\sup_{\substack{|\delta_1|\leqslant h_1,\cdots,|\delta_n|\leqslant h_n\\|\theta_1|\leqslant\pi,\cdots,|\theta_n|\leqslant\pi}}|A(f;\theta_1,\cdots,\theta_n;\delta_1,\cdots,\delta_n)|$$

及

$$\omega_p(f;h_1,\cdots,h_n)=$$
$$\left[\sup_{|\delta_1|\leqslant h_1,\cdots,|\delta_n|\leqslant h_n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}|A(f;\theta_1,\cdots,\theta_n;\delta_1,\cdots,\delta_n)|^p d\theta_1\cdots d\theta_n\right]^{\frac{1}{p}}$$

$(p\geqslant1)$为$-\pi\leqslant\theta_1,\cdots,\theta_n\leqslant\pi$中定义的连续函数$f(\theta_1,\cdots,\theta_n)$的连续模及 p 次积分模。

若对任意 $h_1>0,\cdots,h_n>0$，存在 α，使

$$\omega_p(f;h_1,\cdots,h_n)\leqslant K(h_1\cdots h_n)^\alpha\ (K\text{ 为绝对常数})$$

恒成立，那么称 $f(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 满足 Lipschitz 条件 (p,α)，记其全体为 Lip (p,α)。

有了这些准备，可以证明以下三条定理。

定理 3.6.1 若 $u(U)\in C^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 且

$$D\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)H(\theta_1,\cdots,\theta_n)\in \mathrm{Lip}(2,\alpha),$$

这里 $H(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 由 (3.6.1) 定义，那么，当

$$\alpha>\frac{1}{r}-\frac{1}{2}$$

时，级数

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n}|\mathrm{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\overline{C}'_{f_1\cdots f_n})|^r \tag{3.6.6}$$

收敛，但

$$1>r>\frac{2}{3}.$$

定理 3.6.2 若 $u(U)\in C^{\frac{3n(n-1)}{2}}$，且

$$\left(D\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)\right)^3 H(\theta_1,\cdots,\theta_n)\in \mathrm{Lip}(2,\alpha),$$

这里 $H(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 由 (3.6.1) 定义，那么，当

$$\alpha>\frac{1}{r}-\frac{1}{2}$$

时，级数

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n}\left(\sum_{j,k=1}^{N(f)}|C_f^{(jk)}||\varphi_f^{(jk)}|\right)^r \tag{3.6.7}$$

收敛，但

$$1>r>\frac{2}{3}.$$

定理 3.6.3 若 $u(U)\in C^{3n(n-1)}$，且

$$\left(D\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)\right)^5 H(\theta_1,\cdots,\theta_n)\in \mathrm{Lip}(2,\alpha),$$

则 $u(U)$ 的 Fourier 级数绝对收敛，但

$$\alpha>\frac{1}{2}.$$

现在来证明这些定理。

由于函数 $D\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)H(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 的多重 Fourier 级数为(3.6.5)的形式，且 $D\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)H(\theta_1,\cdots,\theta_n)\in$ $\mathrm{Lip}(2,\alpha)$，所以，由于多重 Fourier 级数的绝对收敛的定理(例如参阅 Musielak [1]，定理 2)，我们知道，当 $\alpha>\frac{1}{r}-\frac{1}{2}$ 时，级数(3.6.6)收敛，故得定理 3.6.1。

由 Schwarz 不等式，我们有

$$|\mathrm{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U))|^2\leqslant\frac{(N(f))^2}{C}\mathrm{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\overline{C}'_{f_1\cdots f_n}).\quad(3.6.8)$$

如同以往一样，可以证明：函数

$$\left(D\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)\right)^3H(\theta_1,\cdots,\theta_n)$$

的多重 Fourier 级数为

$$(D(n-1,\cdots,1,0))^3\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n}(-i)^{\frac{3n(n-1)}{2}}$$
$$\cdot\,\mathrm{tr}(C_f\overline{C}'_f)M_f(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n}).$$

由于

$$\left(D\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)\right)^3H(\theta_1,\cdots,\theta_n)\in\mathrm{Lip}(2,\alpha),$$

所以，由多重 Fourier 级数的绝对收敛的定理，立刻得到，当 $\alpha>\frac{1}{r}-\frac{1}{2}$ 时，级数

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n}(N(f))^2\mathrm{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\overline{C}'_{f_1\cdots f_n})$$

收敛，这也保证了级数(3.6.7)的收敛性。因为，由 Schwarz 不等式，我们知道

$$\left|\sum_{j,k=1}^{N(f)}\left|C_f^{(jk)}\right|\left|\varphi_f^{(jk)}\right|\right|^2\leqslant\frac{(N(f))^2}{C}\mathrm{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\overline{C}'_{f_1\cdots f_n})\qquad(3.6.9)$$

成立。这就证明了定理 3.6.2。

同样，用 Schwarz 不等式

$$\left|\sum_{f_1>\cdots>f_n} N(f)(\mathrm{tr}(C_f\overline{C}_f'))^{\frac{1}{2}}\right| \leqslant \left(\sum_{f_1>\cdots>f_n} N^4(f)\,\mathrm{tr}\,(C_f\overline{C}_f')\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{f_1>\cdots>f_n} \frac{1}{(N(f))^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.6.10}$$

而函数

$$\left(D\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)\right)^5 H(\theta_1, \cdots, \theta_n)$$

的多重 Fourier 级数为

$$(D(n-1,\cdots,1,0))^4 \cdot \sum_{f_1>f_2>\cdots>f_n} (N(f))^4 \mathrm{tr}(C_f\overline{C}_f') M_{f_1\cdots f_n}(e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}).$$

同样，应用多重 Fourier 级数的绝对收敛的定理，就得到，当

$$\left(D\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)\right)^5 H(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathrm{Lip}\ (2, \alpha)$$

时，级数

$$\sum_{f_1>\cdots>f_n} (N(f))^4\ \mathrm{tr}\,(C_f\overline{C}_f')$$

收敛，但 $\alpha > \frac{1}{2}$. 从不等式 (3.6.9) 及 (3.6.10)，即得定理 3.6.3.

由以上的证明可以看出，如果我们用另外一些关于多重 Fourier 级数的绝对收敛定理，例如，Zygmund 定理，Szasz 定理等的推广形式，也可以获得不少关于酉群上 Fourier 级数绝对收敛的相应的充分条件.

最后还应说明，本章中所有定理用到的条件，特别是关于可微次数的条件都可能削弱.

这里所讨论的收敛或绝对收敛，都是“方体”求和意义下进行的. 至于“球”求和就不同，将在第五章进行讨论. 利用这一章的想法，参阅第五章及 Chandrasekharan-Minakshisundaran [1] 第九章，可得出关于“球求和”的绝对收敛的结果来.

第四章　关于 Peter-Weyl 定理

§4.1　Peter-Weyl 定理

若G是紧致李群，f是G上的连续函数，对于任意已给的 $\varepsilon>0$，一定存在G的表示环上定义的一个函数g，使得$|f(\sigma)-g(\sigma)|<\varepsilon$ 对于任意的 $\sigma\in G$ 都成立．这是众所周知的 F. Peter 与 H. Weyl 的定理(例如参阅 Chevally [1]，Peter-Weyl [1])．

上述结果对于一般的紧致拓扑群也是对的(例如参阅 Peter-Weyl [1]，Понтрягин [1])．

这是一条极为重要的紧致拓扑群上逼近理论的存在定理．

华罗庚[2]证明了在酉群上连续函数的一条收敛定理，并指出了其在一般紧致群上的意义．

这一章是在前面几章的基础上，对于紧致拓扑群上的逼近理论进行一些初步的探讨．在这里不仅要具体作出在G的表示环上定义的函数 $g(\sigma)$，而且还要指出 f 与 g 之间的误差程度有多大．

在 §4.2 中，定义了在紧致拓扑群G上连续的函数的连续模．在 §4.3 中，研究了在紧致拓扑群G上定义的属于 Lip p 的连续函数用 Cesàro 平均而得到的逼近式及其逼近程度．例如，借助于第二章中的结果，证明了：如果 $f(\sigma)\in \mathrm{Lip}\, p$ (定义见 §4.2)，那么可以找到一个在G的表示环上定义的有限线性式 $g_N(\sigma)$，使得

$$|f(\sigma)-g_N(\sigma)|<AN^{-p}$$

成立，这里A为绝对常数，而 $g_N(\sigma)$ 是可以具体写出来的(见(4.3.8))．

事实上，这里还指出了如何去构造其它的逼近式，以及如何来求出逼近误差的程度，这是 §4.4 的内容．为了不使篇幅过长，略去了这些繁复的计算．

§4.5 是举了一个如何来处理酉群上的插值问题的一例．最后

把一部分结果应用于多复变数矩阵双曲空间中的解析函数的逼近理论中去.

§4.2 紧致拓扑群上的连续函数

设G是紧致拓扑群，$\sigma\in G$. 若 $f(\sigma)$ 是G上的连续函数，那么 $f(\sigma)$ 一定是在G上均匀连续. 也就是对于每一个 $\varepsilon>0$，存在G的单位e的领域V,使得 $xy^{-1}\in V$ 及 $x\in G$，$y\in G$ 时,恒有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon. \tag{4.2.1}$$

与这等价的说法是：对于每一个 $\varepsilon>0$，存在G的单位e的邻域V'，使得当 $x^{-1}y\in V'$ 及 $x\in G$，$y\in G$ 时，恒有(4.2.1)(参阅 Понтрягин [1]).

对于任一紧致拓扑群G，至少有一个实在的表示(faithful representation). 当然这个表示可以是酉表示，且与G同构. 因此，在同构的意义下,可以把紧致拓扑群"嵌入"酉群内作为一个子群. 即：若 $\sigma\in G$，则σ的酉表示 $U(\sigma)$ 使G与$\{U(\sigma)|\sigma\in G\}$同构.

记 $W=\{U\in U_n|U=U(\sigma),\ \sigma\in G\}$. 于是 $W\subset U_n$，在W上定义连续函数 $u(U)=f(\sigma)$. 当然 $u(U)$ 不仅在 W 上可以定义,且可以连续的拓展到整个U_n上(参阅 Chevalley[1], Понтрягин [1]). 必须注意的是：由于实在的表示可以不止一个，以至这样的 W 也可以不止一个.

设 U、V 为 W 中的二点，$U=(u_{ij})1\leqslant i,j\leqslant n$,$V=(v_{ij})$ $1\leqslant i,j\leqslant n$. 于是 U、V 二点之间的欧氏距离$d(U,V)$的平方为

$$\sum_{i,j=1}^{n}|u_{ij}-v_{ij}|^2.$$

而此即

$$\mathrm{tr}((U-V)\overline{(U-V)}')=\mathrm{tr}(2I-U\overline{V}'-V\overline{U}')$$

若 $U\overline{V}'$ 的特征根为 $e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}$，那么 $d(U,V)$ 的平方就是

$$2\sum_{j=1}^{n}(1-\cos\theta_j). \tag{4.2.2}$$

设 $u(U)$ 是 U_n 上的连续函数，我们称

$$\omega(u,\delta)=\max_{d(U,V)\leqslant\delta}|u(U)-u(V)|$$

为函数 $u(U)$ 的连续模.

设 $f(\sigma)$ 在紧致拓扑群 G 上连续，$(\sigma\in G)$ 则 G 至少有一个实在的酉表示，而且可以在同构的意义下，将 G“嵌入”某一酉群(例如 m 阶酉群)作为子群. 如前那样，记

$$W=\{U\in U_m|U=U(\sigma),\sigma\in G\},$$

于是对应于一个实在的 m 阶的酉表示，可以有

$$\omega'_m(f,\sigma)=\max_{\substack{x\in G,\ y\in G\\ d(U(x),U(y))\leqslant\delta}}|f(x)-f(y)|.$$

更进一步，若 $f(\sigma)$ 在 G 上连续，且

$$|f(x)-f(y)|\leqslant A(d(U(x),U(y)))^{p'},$$

这里 A 为绝对常数. 在多种可能的实在的酉表示中，选择一个使 p' 最大的酉表示，若此酉表示所对应的 p' 的值记之为 p，则称函数 $f(\sigma)$ 满足 Lipschitz 条件，记之为 $f(\sigma)\in\mathrm{Lip}\,p$.

§4.3 用 Cesàro 平均得到的逼近

在第二章中，仔细的研究了酉群 U_n 上的 Fourier 级数的 Cesàro (c,α) 平均，并且证明了: 如果 $u(U)$ 在 U_n 上连续，则 $u(U)$ 的 Fourier 级数可以 (c,α) 求和于它自己，但 $\alpha>\frac{n-1}{n}$.

在证明这个定理的过程中，实际上证明了 $u(U)$ 与它的 Fourier 级数的 Cesàro (c,α) 平均的第 N 项 $\Sigma_N^\alpha(U)$ 之差的绝对值不大于

$$O(\omega(u,\delta))+O\left(\frac{1}{(N\delta)^{\alpha n-n+1}}\right)$$
$$+O\left(\frac{1}{(N\delta)^{2(\alpha n-n+2)}}\right)+\cdots+O\left(\frac{1}{(N\delta)^{\alpha n^2}}\right).$$

因此，若 $u(U)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$，则取

$$\delta=N^{\frac{n-\alpha n-1}{p+\alpha n-n+1}},$$

于是得到

$$|u(U)-\Sigma_N^\alpha(U)|\leqslant AN^{-\frac{p(\alpha n-n+1)}{p+\alpha n-n+1}},$$

这里 A 为绝对常数及 $\alpha>\dfrac{n-1}{n}$.

这还是比较粗糙的结果. 回顾定理 2.3.1 的证明过程,可以证得更仔细的结果.

定理 4.3.1 若 $u(U)$ 是酉群 U_n 上的连续函数,且属于 $\mathrm{Lip}\,p$, $(0<p\leqslant 1)$, 则它的 Fourier 级数的 (C,α) 平均的第 N 项 $\Sigma_N^\alpha(U)$ 满足

(1) 若 $\alpha n-n+1>p$, 则

$$|u(U)-\Sigma_N^\alpha(U)|\leqslant A_1N^{-p}; \tag{4.3.1}$$

(2) 若 $\alpha n-n+1=p$, 则

$$|u(U)-\Sigma_N^\alpha(U)|\leqslant A_2N^{-p}\ln N; \tag{4.3.2}$$

(3) 若 $\alpha n-n+1<p$, 则

$$|u(U)-\Sigma_N^\alpha(U)|\leqslant A_3N^{-\alpha n+n-1}, \tag{4.3.3}$$

这里 A_1,A_2,A_3 为绝对常数.

证 由 (2.3.3), 记 $I'_{t_1,\cdots,t_n}$ 为

$$\int_\delta^\pi|\varphi(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})||1-e^{i\theta_1}|^{t_1}|\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^n d\theta_1$$

$$\cdot\int\!\!\cdots\!\!\int_{\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta}|1-e^{i\theta_2}|^{t_2}\cdots|1-e^{i\theta_n}|^{t_n}|\sigma_N^\alpha(\theta_2)|^n\cdots|\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^n$$

$$\cdot|D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})|^2d\theta_2\cdots d\theta_n, \tag{4.3.4}$$

这里 $\varphi,\sigma_N^\alpha,D$ 的意义已在第二章中定义.

由于 $u(U)\in\mathrm{Lip}\,p$, 及当 $\delta\geqslant\dfrac{1}{N}$ 时,

$$|\sigma_N^\alpha(\theta)|\leqslant a_1N^{-\alpha}\theta^{-\alpha-1},$$

所以得到 $I'_{t_1,\cdots,t_n}$ 不大于

$$a_2\int_\delta^\pi N^{-\alpha n}\theta_1^{-\alpha n-n+t_1+p}d\theta_1 N^{n-1}\delta^{t_2+\cdots+t_n}\cdot$$

$$\int\!\!\cdots\!\!\int_{\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta}|\sigma_N^\alpha(\theta_2)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^{n-1}|D(e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_n})|^2d\theta_2\cdots d\theta_n$$

$$+ a_3\delta^p\int_\delta^\pi N^{-\alpha n}\theta_1^{-\alpha n-n+s_1}d\theta_1 N^{n-1}\delta^{s_2+\cdots+s_n}\underset{\delta\geq\theta_2\geq\cdots\geq\theta_n\geq-\delta}{\int\cdots\int}|\sigma_N^\alpha(\theta_2)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^{\alpha-1}$$

$$\cdot|D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})|^2 d\theta_2\cdots d\theta_n, \tag{4.3.5}$$

这里 a_1, a_2, a_3 表示三个不同的绝对常数。

(1) 当 $\alpha n - n + 1 > p$，由于 $s_1 \leqslant 2n-2$，所以

$$-\alpha n - n + s_1 + p < -\alpha n - n + s_1 + \alpha n - n + 1$$
$$= -2n + 1 + s_1 \leqslant -1,$$

因此，从 (4.3.5) 得到

$$I'_{s_1,\cdots,s_n} = O((\delta N)^{-\alpha n+n-1}\delta^p).$$

取 $\delta = \frac{1}{N}$，即得 (4.3.1)。

(2) 当 $\alpha n - n + 1 = p$，则

$$-\alpha n - n + s_1 + p = -\alpha n - n + s_1 + \alpha n - n + 1$$
$$= -2n + 1 + s_1.$$

所以，从 (4.3.5) 知道

$$I'_{2n-2,s_2,\cdots,s_n} = O(N^{-\alpha n+n-1}\ln\delta) + O((\delta N)^{-\alpha n+n-1}\delta^p),$$

而当 $s_1 \neq 2n-2$ 时，

$$I'_{s_1,\cdots,s_n} = O((\delta N)^{-\alpha n+n-1}\delta^p),$$

即

$$|u(U) - \Sigma_N^\alpha(U)| \leqslant a_4 N^{-p}\ln\delta + a_5 N^{-p},$$

这里 a_4, a_5 为绝对常数。取 $\delta = \frac{1}{N}\ln N$，则得 (4.3.2)。

(3) 当 $\alpha n - n + 1 < p$ 时，

$$-\alpha n - n + s_1 + p > -\alpha n - n + s_1 + \alpha n - n + 1$$
$$= -2n + 1 + s_1,$$

所以

$$I'_{2n-2,s_2,\cdots,s_n} = O(N^{-\alpha n+n-1}) + O((N\delta)^{-\alpha n+n-1}\delta^p).$$

于是

$$|u(U) - \Sigma_N^\alpha(U)| \leqslant a_6 N^{-\alpha n+n-1} + a_7(N\delta)^{-\alpha n+n-1}$$
$$\cdot \delta^p\ln\delta + a_8(N\delta)^{-\alpha n+n-1}\cdot\delta^p.$$

考虑到 $p > \alpha n - n + 1$，而且 $\delta \geqslant \frac{1}{N}$，所以得到 (4.3.3)。

回忆一下酉群 U_n 上可积函数 $u(U)$ 的 Fourier 级数的 Cesàro (c, α) 平均的第 N 项为

$$\sum_{\alpha N \geqslant f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant -\alpha N} B^{\alpha}_{f_1 \cdots f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1 \cdots f_n} \Phi'_{f_1 \cdots f_n}(U)), \qquad (4.3.6)$$

这里

$$B^{\alpha}_{f_1 \cdots f_n} = \frac{1}{CN(f)} \int_{U_n} \chi_{f_1 \cdots f_n}(\overline{V}) K^{\alpha}_N(V) \dot{V}, \qquad (4.3.7)$$

而 $K^{\alpha}_N(V)$ 为 Cesàro (C, α) 核，由 (2.23) 所定义。

若 G 为紧致拓扑群，$f(\sigma)$ 为 G 上的连续函数，且 $f(\sigma) \in \operatorname{Lip} p$，则可以作在 G 的表示环上定义的函数

$$g_N(\sigma) := \sum_{\alpha N \geqslant f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant -\alpha N} B^{\alpha}_{f_1 \cdots f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1 \cdots f_n} \Phi'_{f_1 \cdots f_n}(U(\sigma))), \quad (4.3.8)$$

这里 $B^{\alpha}_{f_1 \cdots f_n}$ 由 (4.3.7) 所定义。于是定理 4.3.1 可写成

定理 4.3.2 设 G 为紧致拓扑群，$f(\sigma)$ 为 G 上的连续函数，且 $f(\sigma) \in \operatorname{Lip} p \ (\sigma \in G)$，在 G 的表示环上作由 (4.3.8) 所定义的函数 $g_N(\sigma)$，于是得到：

(1) 若 $p \neq \alpha n - n + 1$，则

$$|f(\sigma) - g_N(\sigma)| \leqslant A_4 N^{-q}$$

这里 $q = \min(p, \alpha n - n + 1)$，$A_4$ 为绝对常数。

(2) 若 $p = \alpha n - n + 1$，则

$$|f(\sigma) - g_N(\sigma)| \leqslant A_2 N^{-p} \ln N.$$

作为上述定理的推论，已知 p 之后，只要取 α 充分大，使 $\alpha n - n + 1 > p$，就可得：

定理 4.3.3 设 G 为紧致拓扑群，$f(\sigma)$ 为 G 上的连续函数，且 $f(\sigma) \in \operatorname{Lip} p (\sigma \in G)$，则一定可以在 G 的表示环上作函数 $g_N(\sigma)$，使

$$|f(\sigma) - g_N(\sigma)| \leqslant A_5 N^{-p},$$

这里 A_5 为绝对常数。

作为定理 4.3.2 的另一个推论，特别取 $\alpha = 1$，即取 Fejer 平

均，就能够得到

定理 4.3.4 设 G 为紧致拓扑群，$f(\sigma)$ 为 G 上的连续函数，且 $f(\sigma)\in \mathrm{Lip}\, p\ (\sigma\in G)$，在 G 的表示环上作

$$g_N(\sigma)=\sum_{nN\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant -nN} B_{f_1\cdots f_n}\mathrm{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U(\sigma))),\quad(4.3.9)$$

这里 $B_{f_1\cdots f_n}$ 由 (2.5.2) 所定义（当 $N\geqslant n-1$ 时，由 (2.7.7) 具体表示出来）。那么

(1) 若 $p<1$ 时，则

$$|f(\sigma)-g_N(\sigma)|<A_6N^{-p};\quad(4.3.10)$$

(2) 若 $p=1$ 时，则

$$|f(\sigma)-g_N(\sigma)|<A_7\ln N/N;\quad(4.3.11)$$

这里 A_6，A_7 为绝对常数.

附带提的是定理 4.3.4 把一个变数的函数的 Fourier 级数的 C. H. Бернштейн 的定理作为最特殊的情形。

§4.4 一些一般的推论

依赖于酉群上定义的函数 $u(U)$ 的 Fourier 级数的 Cesàro 求和，可以得到紧致拓扑群上的逼近定理，这样不但具体的作出了在 G 的表示环上定义的函数，而且算出了误差程度．这样所作的函数，不一定就是最优逼近．但是其它的求和所得的逼近式，也可以依据这个办法作出，而且同样可以给出它的误差程度．为此，在这一节中举出一些一般的结果，作为前面所得的结果所用方法的推论．例如，我们可以证明如下的一条一般收敛定理．

设 $K_N(\theta)$ 是一个变数的 Fourier 级数的 T 求和的核．设 $V\in U_n$，$\bar{V}$ 的特征根为 $e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}$，记

$$D=\frac{1}{C}\int_{U_n}(K_N(\theta_1)\cdots K_N(\theta_n))^n\dot{V}.\quad(4.4.1)$$

定义

$$\sum_{nN\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant -nN} D_{f_1\cdots f_n}\mathrm{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U))\quad(4.4.2)$$

为 $u(U)$ 的 Fourier 级数的 T 平均．这里

$$D_{f_1\cdots f_n}=\frac{1}{DN(f)C}\int_{U_n}\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V})(K_N(\theta_1)\cdots K_N(\theta_n))^n\dot{V}.$$

(4.4.2) 可写成

$$\int_{U_n}u(VU)T_N(\overline{V})\dot{V},$$

这里

$$T_N(\overline{V})=\frac{1}{DC}(K_N(\theta_1)\cdots K_N(\theta_n))^n. \qquad (4.4.3)$$

如果再假设

(i) 当 $\pi\geqslant\theta\geqslant\delta$ 时，对于任意固定的 $\delta>0$，我们有

$$|K_N(\theta)|=O(N^{-\eta}) \qquad (4.4.4)$$

成立，而 $\eta>0$.

(ii) 对于任意的 θ，

$$|K_N(\theta)|=O(N^{\xi}) \qquad (4.4.5)$$

成立，而 $\xi>0$.

于是我们有

定理 4.4.1 若 $u(U)$ 在 U_n 上连续，它的 Fourier 级数的 T 平均 (4.4.2) 收敛于 $u(U)$，假使由 (4.4.3) 所定义的 $T_N(\overline{V})$ 满足

$$\int_{U_m}|T_N(\overline{V})|\dot{V}\leqslant H_m \quad (m=1,2,\cdots,n), \qquad (4.4.6)$$

这里 H_m 是只与 m 有关的绝对常数，而且 $K_N(\theta)$ 满足 (4.4.4) 及 (4.4.5) 且 $\eta\geqslant\xi$.

这个定理的证明从略，可参阅定理 2.3.1 的证明.

作为上述定理的举例，我们定义在酉群 U_n 上定义的函数 $u(U)$ 的 Fourier 级数的 Jackson 平均为

$$\begin{aligned}J_N(U)&=\sum_{2nN\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant-2nN}J_{f_1\cdots f_n}\mathrm{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U))\\&=\frac{J}{C}\int_{U_n}u(VU)\left|\frac{\det(I-V^{N+1})}{\det(I-V)}\right|^{4n}\dot{V},\end{aligned} \qquad (4.4.7)$$

而

$$J=\left(\frac{3}{N(2N^2+1)}\right)^{n^2}.$$

当然 $J_{f_1\cdots f_n}$ 的具体数值可以用积分表达出来. 首先我们看到(4.4.6)是满足的，因为此时 $H_m=1$, $m=1,2,\cdots,n$. 其次看到，当 $\pi\geqslant\theta\geqslant\delta$ 时，

$$K_N(\theta)=O(N^{-3}\delta^{-4}),$$

而对于任意的 θ

$$K_N(\theta)=O(N).$$

所以定理 4.4.1 中的条件全满足，以至(4.4.7)是收敛的，且收敛于 $u(U)$.

当然可以指出 T 平均与 $u(U)$ 的误差有多大，例如，可以不大费力粗糙的算出

$$|J_N(U)-u(U)|\leqslant AN^{-\frac{p(n+2)}{4n+p-1}},$$

若 $u(U)\in \operatorname{Lip} p$.

至于满足定理 4.1.1 的条件的 T 求和与 $u(U)$ 的误差估计等都略而不去写出来了. 当然这些结果都可以推到紧致拓扑群上.

§4.5 酉群上插值一例

对于酉群上一般插值问题该如何提？这是个值得研究的问题，这里仅举最简单的一例.

已知酉群 U_n 上定义的函数 $u(U)$，要求一个有限线性式，使之与 $u(U)$ 在以下 $n(2N+1)^n$ 个点上有相同的值，这 $n(2N+1)^n$ 个点是

$$U_{p_1\cdots p_n}=V_0\begin{pmatrix} e^{\frac{2p_1\pi i}{2N+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\frac{2p_n\pi i}{2N+1}}\end{pmatrix}\overline{V}'_0,$$

这里 p_j 是满足 $1\leqslant p_j\leqslant 2N+1$ 的正整数 $(j=1,2,\cdots,n)$，V_0 是固定的一个酉矩阵，换句话说，我们考虑的是一种简单的"等距"结点的插值问题.

回答这个问题并不困难，因为这 $n(2N+1)^n$ 个点，不论 N 取多么大，都是在一个 n 维流形上的，而 U_n 本身是 n^2 维的.

考虑

$$\frac{\det^n(I-U^{2N+1})}{A^0 C \det^{nN} U \det^n(I-U)}$$

$$=\frac{1}{A^0 C}\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin^n\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta_j}{\sin^n\theta_j/2},$$

这里

$$A^0=\frac{1}{C}\int_{U_n}\det^{nN}V\,\frac{\det^n(I-\bar{V}'^{2N+1})}{\det^n(I-\bar{V}')}\dot{V},$$

而 $e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}$ 为 U 的特征根。

可以证明

$$\sum_{nN\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant -nN}A^0_{f_1\cdots f_n}N(f)\,\chi_{f_1\cdots f_n}(U)=\frac{\det^n(I-U^{2N+1})}{A^0\det^{nN}U\det^n(I-U)},$$

而

$$A^0_{f_1\cdots f_n}=\frac{1}{A^0 N(f) C}\int_{U_n}\chi_{f_1\cdots f_n}(\bar{V})\frac{\det^{nN}V\det^n(I-\bar{V}'^{2N+1})}{\det^n(I-\bar{V}')}\dot{V}.$$

作

$$\varphi_{p_1\cdots p_n}(U)=\frac{\det^n(I-U^{2N+1}U^{2N+1}_{p_1\cdots p_n})}{(2N+1)^{n^2}\det^{nN}U\cdot U_{p_1\cdots p_n}\det^n(I-UU_{p_1\cdots p_n})}.$$

从这个定义可以看出

(i)

$$\varphi_{p_1\cdots p_n}(U)=\frac{A^0 C}{(2N+1)^{n^2}}\sum_{nN\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant -nN}\cdot A^0_{f_1\cdots f_n}\operatorname{tr}(\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U_{p_1\cdots p_n})\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)).$$

即 $\varphi_{p_1\cdots p_n}(U)$ 是一个有限线性式，又可以写成由指标在 $nN\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant -nN$ 之中的西表示的有限线性式。

(ii)

$$\varphi_{p_1\cdots p_n}(U_{q_1\cdots q_n})=\begin{cases}1 & \text{当}\ (p_1,\cdots,p_n)=(q_1,\cdots,q_n)\\ 0 & \ (p_1,\cdots,p_n)\neq(q_1,\cdots,q_n).\end{cases}$$

因此作函数

$$P_N(U)=\sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n} u(U_{p_1,\cdots,p_n})\varphi_{p_1\cdots p_n}(U).$$

即是我们所要求的函数．写得更清楚一些，此即

$$P_N(U)=\frac{A^0C}{(2N+1)^{n^2}}$$

$$\cdot\sum_{nN\geqslant f_1>\cdots>f_n\geqslant -nN} A^0_{f_1\cdots f_n}\operatorname{tr}[E_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)],$$

此处

$$E_{f_1\cdots f_n}=\sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n} u(U_{p_1,\cdots,p_n})\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U_{p_1\cdots p_n}).$$

当然还可以用别的方法来构造 $P_N(U)$ 来，例如可以采用 C. H. Бернштейн 的第一方法，应用第二章中的 Fejér 核来造出另一个 $P_N(U)$ 来．（参阅 Натансон [1] 第三卷，第四章）．

§4.6 多复变数矩阵双曲空间上的逼近

作为以前这些结果的直接推论，可以得到多复变数矩阵双曲空间上的逼近．多复变数典型域的第一类 $\mathscr{R}_I$ 被定义为

$$I-Z\bar{Z}'>0,\qquad Z=Z^{(m,n)},$$

特别当 $m=n$ 时，n 阶酉群就是它的特征流形．

例如，从第三章就可以得到

定理 4.6.1 设 $u(Z)$ 在 $I-Z\bar{Z}'>0$, $Z=Z^{(n)}$ 及其特征流形上都是解析的，那么 $u(Z)$ 的开始N项 Taylor 展开 $s_N^{(n)}(Z)$ 满足

$$|u(Z)-s_N^{(n)}(Z)|<A_8\left(\frac{\ln^{n^2}N}{N}\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

这里 A_8 为绝对常数，所谓开始N项 Taylor 展开是指 Z 的表示 $\Phi_{l_1\cdots l_n}(Z)$，而 $N\geqslant l_1>\cdots>l_n\geqslant 0$．

再例如，从定理 4.3.4 立刻得到

定理 4.6.2 设 $u(Z)$ 在 $\mathscr{R}_I$ 中解析，在 U_n 上属于 Lip p，则 $u(Z)$ 的 Taylor 展开的 Fejér 平均 $\Sigma_N^{(p)}(Z)$ 满足

$$|u(Z)-\Sigma_N^{(\nu)}(Z)|<A_{10}\ln N/N,$$

这里 A_9, A_{10} 是绝对常数，而

$$\sum\nolimits_N^{(r)}(Z)=\sum_{nN\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}B_{f_1\cdots f_n}\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(Z))$$

$B_{f_1\cdots f_n}$ 由 (2.5.2) 所定义。

当然其它的结果也可以推演到 $\mathscr{R}_1$ 上，不再一一叙述了。

第五章　酉群上 Fourier 级数的球求和

§5.1　引言

设 $u(U)$ 在 n 阶酉群 U_n 上可积，那么它有 Fourier 级数

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)). \tag{5.1.1}$$

在以前几章中，考虑的都是"方体"求和，即从

$$\sum_{N\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant -N} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)) \tag{5.1.2}$$

出发加以考虑．在以前几章中，已经得到一系列结果，这些结果以具有整洁的核作为特色．本章考虑"球"求和．所谓球求和，乃是把 Fourier 级数考虑为

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\substack{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\\ f_1^2+\cdots+f_n^2=m}} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)). \tag{5.1.3}$$

以此出发，加以研究．如果考虑的区域不是酉群，而是 n 个单位圆周的拓扑积，那么前一种考虑相当于以 A. Zygmund [1] 为代表的对于多重 Fourier 级数的研究，而后一种考虑相当于以 S. Bochner [1] 为代表的对于多重 Fourier 级数的研究．

这一章首先给出在 n 阶酉群 U_n 上可积函数 $u(U)$ 的 Fourier 级数的一般球平均的积分表达式，当然对于球平均的定义本身需要有一些要求．从这点出发，证明了：如果 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数可以 δ 次 Riesz 求和于它自己，但 $\delta>\frac{n^2-1}{2}$．

同时还证明了：(1) 如果 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数可以 Gauss-Sommerfeld 求和于它自己．

(2) 如果 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数可以

Abel 求和于它自己．

必须注意的是：这里所说的求和，全是指“球”求和，即从(5.1.3)出发加以考虑．与以往所说的求和的意义是完全不同的．在以后，除非特别声明，所说的求和，完全是指“球”求和．最后，还给出了一般求和的收敛定理．

以往考虑“方体”求和时，核是非常简洁的，而求和的系数比较复杂．在“球”求和的情形下，这点是可以避免的．

本章取自龚升[5]．

§5.2 Fourier 级数的球求和

若 $\varphi(t)$ 是定义在 $0 \leqslant t < \infty$ 上的一个固定函数，且 $\varphi(0) = 1$．所谓考虑某一种“球”求和，乃是考虑某一种平均

$$\sum_{m=0}^{\infty} \phi\left(\frac{\sqrt{m}}{R}\right) \sum_{\substack{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \\ f_1^2+\cdots+f_n^2=m}} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n} \Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)) \tag{5.2.1}$$

当 R 趋于无穷时的情形．这里

$$\phi(t) = \varphi(t)/\varphi\left(\sqrt{\frac{(2n-1)n(n-1)}{6R^2}}\right).$$

如果当 $R \to \infty$ 时，(5.2.1) 的极限存在，那么称 $u(U)$ 的 Fourier 级数可以按某种球求和于它的极限值．

最有兴趣而具体的几个 $\varphi(t)$ 是以下的几个函数：

(1) $\varphi(t) = e^{-t}$，这是 Abel 求和；

(2) $\varphi(t) = e^{-t^2}$，这是 Gauss-Sommerfeld 求和；

(3) $\varphi(t) = \begin{cases}(1-t^2)^\delta, & 当\ 0 \leqslant t < 1, \\ 0 & 当\ 1 \leqslant t,\end{cases}$ 这是 δ 次 Riesz 求和．

说得更清楚些，所谓考虑 $u(U)$ 的 Fourier 级数的 Abel 求和，乃是考虑 Abel 平均．

$$\exp\left(\sqrt{\frac{(2n-1)\,n\,(n-1)}{6R^2}}\right) \sum_{\substack{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \\ m=f_1^2+\cdots+f_n^2}} e^{-\frac{\sqrt{m}}{R}} \cdot tr(c_{f_1\cdots f_n} \Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)) \tag{5.2.2}$$

当 $R\to\infty$ 时的情形；Gauss-Sommerfeld 求和乃是考虑 Gauss-Sommerfeld 平均

$$\exp\left(\sqrt{\frac{(2n-1)n(n-1)}{6R^2}}\right)\sum_{\substack{l_1\geqslant\cdots\geqslant l_n\\ m=l_1^2+\cdots+l_n^2}} e^{-\frac{m}{R}}\cdot \operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)\right)\tag{5.2.3}$$

当 $R\to\infty$ 的情形；δ 次 Riesz 求和，乃是考虑 δ 次 Riesz 平均

$$\left(1-\frac{(2n-1)n(n-1)}{6R^2}\right)^{-\delta}\sum_{\substack{l_1\geqslant\cdots\geqslant l_n\\ m=l_1^2+\cdots+l_n^2}}\left(1-\frac{m}{R^2}\right)^{\delta}\cdot \operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)\right)\tag{5.2.4}$$

当 $R\to\infty$ 时的情形。

我们将要证明

定理 5.2.1 设 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数可以 Abel 求和于它自已，即(5.2.2)当 $R\to\infty$ 时趋于 $u(U)$ 自己。

定理 5.2.2 设 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数可以 Gauss-Sommerfeld 求和于它自己，即(5.2.3)当 $R\to\infty$ 时趋于 $u(U)$ 自己。

定理 5.2.3 设 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数可以 δ 次 Riesz 求和于它自己，但 $\delta>\frac{n^2-1}{2}$。即当 $\delta>\frac{n^2-1}{2}$ 时，(5.2.4)当 $R\to\infty$ 时趋于 $u(U)$ 自己。

在定理证明过程中，可以发现，不论是 Abel 求和，Gauss-Sommerfeld 求和或 δ 次 Riesz 求和 $\left(\delta>\frac{n^2-1}{2}\right)$，都是“局部”性质。

§5.3 积分表达式

考虑(5.2.1)，记之为 $S_R^a(U)$，这可以写成为

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(WU) \sum_{\substack{f_1\geq\cdots\geq f_n \\ m=l_1^2+\cdots+l_n^2}} \phi\left(\frac{\sqrt{m}}{R}\right) N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{W})\dot{W}. \quad (5.3.1)$$

记 $\overline{W}$ 的特征根为 $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$，那么由第一章，我们知道

$$\sum_{f_1\geq\cdots\geq f_n} r^{|l_1|+\cdots+|l_n|} N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{W})$$

$$= \frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!\cdots 2!\,1!\,D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})} \cdot \begin{vmatrix} p_r(\theta_1), & \cdots, & p_r(\theta_n) \\ p_r'(\theta_1), & \cdots, & p_r'(\theta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_r^{(n-1)}(\theta_1), & \cdots, & p_r^{(n-1)}(\theta_n) \end{vmatrix},$$

这里 $p_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$.

记 $g(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 为

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!\cdots 2!\,1!} \begin{vmatrix} p_r(\theta_1), & \cdots, & p_r(\theta_n) \\ p_r'(\theta_1), & \cdots, & p_r'(\theta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_r^{(n-1)}(\theta_1), & \cdots, & p_r^{(n-1)}(\theta_n) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{f_1\geq\cdots\geq f_n} r^{|l_1|+\cdots+|l_n|} N(f) M_{f_1\cdots f_n}([e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]) \quad (5.3.2)$$

设 $g(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 的 Fourier 级数为

$$\sum_{\infty>\nu_1,\cdots,\nu_n>-\infty} a_{\nu_1,\cdots,\nu_n} e^{i(\nu_1\theta_1+\cdots+\nu_n\theta_n)}.$$

由于（Bochner【1】）我们知道

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m=l_1^2+\cdots+l_n^2} \phi\left(\frac{\sqrt{m}}{R}\right) a_{l_1,\cdots,l_n} e^{i(l_1\theta_1+\cdots+l_n\theta_n)}$$

$$= R\int_0^{\infty} g_\theta(t) H_\varphi(tR)\,dt \quad (5.3.3)$$

如果 $\varphi(t)$ 在每个有限区间都绝对连续，且

$$\int_0^\infty |\varphi(t)| t^{\frac{n-1}{2}} dt < \infty, \tag{5.3.4}$$

这里

$$g_\theta(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2(\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_\sigma g(\theta_1 + t\eta_1, \cdots, \theta_n + t\eta_n) d\sigma_\eta, \tag{5.3.5}$$

$$H_\phi(tR) = \frac{(tR)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \varphi(u) u^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-1}{2}}(utR) du, \tag{5.3.6}$$

而 $J_\mu(s)$ 是第一类 μ 阶 Bessel 函数，σ 表球面：$\eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2 = 1$，$d\sigma_\eta$ 表球面上的体积元素，另一方面，(5.3.3) 的左边就是

$$\sum_{m=0}^\infty \sum_{\substack{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \\ m = l_1^2 + \cdots + l_n^2}} \phi\left(\frac{\sqrt{m}}{R}\right) r^{|l_1| + \cdots + |l_n|} N(f) M_{f_1 \cdots f_n}([e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}])$$

因而得到

$$\sum_{m=0}^\infty \sum_{m = l_1^2 + \cdots + l_n^2} \phi\left(\sqrt{\frac{m}{R}}\right) r^{|a_1| + \cdots + |a_n|} N(f) \chi_{f_1 \cdots f_n}(\overline{W})$$

$$= \frac{R}{D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})} \int_0^\infty g_\theta(t) H_\phi(tR) dt \tag{5.3.7}$$

记上面的值为 $F(r, R, \overline{W})$，于是 $F(r, R, \overline{W})$ 又可以写成 (Chandrasekharan-Minakshisundaran [1] 第 IV 章)

$$\frac{R\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2(\pi)^{\frac{n}{2}} D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})} \int_0^\infty \int_\sigma g(\theta + t\eta) H_\phi(tR) d\sigma_\eta dt \tag{5.3.8}$$

这里 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$，$\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$，而(5.3.8)又可以写成

$$\frac{R\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}} D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})} \int_{-\infty}^\infty \cdots \int g(\theta + \xi)$$

$$\cdot \frac{H_\varphi(|\xi| R)}{|\xi|^{n-1}} d\xi_1 \cdots d\xi_n, \tag{5.3.9}$$

这里 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$|\xi| = (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}$。

(5.3.9)又可以写成

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) R \cdot i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2\pi^{\frac{n}{2}} D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})(n-1)! \cdots 2!1!} \cdot \sum_{i_0, i_1, \cdots, i_n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \delta^{0,1,\cdots,n-1}_{i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}} p_r^{(i_0)}(\theta_1 + \xi_1) \cdot \cdots \cdot p_r^{(i_n)}(\theta_n + \xi_n) \cdot \frac{H_\phi(|\xi| R)}{|\xi|^{n-1}} d\xi_1 \cdots d\xi_n. \tag{5.3.10}$$

在上述积分中，对 p_r 的微商是对 θ 进行的，然后以 $\theta + \xi$ 代入。事实上，如果对 p_r 的微商是对 ξ 进行，然后以 $\theta + \xi$ 代入，结果是一样的. 对上述每一个积分进行分部积分，如果 H_ϕ 满足以下的性质:

$$\left.\frac{\partial^{j_1}}{\partial \xi_1^{j_1}} \cdots \frac{\partial^{j_n}}{\partial \xi_n^{j_n}} \frac{H_\phi(|\xi| R)}{|\xi|^{n-1}}\right|_{|\xi|=\infty} = 0, \tag{5.3.11}$$

这里 $0 \leqslant j_1, \cdots, j_n \leqslant n-1$。

于是，(5.3.10)就成为

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) i^{\frac{n(n-1)}{2}} R}{2\pi^{\frac{n}{2}} D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})(n-1)! \cdots 2!1!} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int p_r(\theta_1 + \xi_1) \cdots p_r(\theta_n + \xi_n) \cdot D\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right) \frac{H_\phi(|\xi| R)}{|\xi|^{n-1}} d\xi_1 \cdots d\xi_n, \tag{5.3.12}$$

这里

$$D\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial}{\partial \xi_2}, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial \xi_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_1^{n-1}}, & \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_2^{n-1}}, & \cdots, & \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_n^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

记

$$s_R^\phi(r, U) = \sum_{\substack{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \\ m = l_1^2 + \cdots + l_n^2 < R^2}} \phi\left(\frac{\sqrt{m}}{R}\right) r^{|l_1| + \cdots + |l_n|} \operatorname{tr}(C_{f_1 \cdots f_n} \Phi'_{f_1 \cdots f_n}(U)),$$

那么 $\mathscr{A}(r,U)$ 等于

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(WU)F(r,R,\overline{W})\dot{W}, \tag{5.3.13}$$

而 $F(r,R,\overline{W})$ 为(5.3.8)所定义.

由于 $F(r,R,\overline{W})$ 只是 $\overline{W}$ 的特征根的对称函数，所以我们可以将 u 对于 $\overline{W}$ 的特征根进行对称化，如同以前进行的那样，得到另一个函数 $u^*(WU)$. 可以证明(5.3.13)也等于

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u^*(WU)F(r,R,\overline{W})\dot{W}.$$

记

$$\psi_U(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})=\frac{1}{\omega_n'}\int_{[\dot{W}]} u^*(WU)[\dot{W}],$$

显然 ψ_U 为 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 的对称函数，于是得到

$$\mathscr{A}(r,U)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\pi\geq\theta_1\geq\cdots\geq\theta_n\geq-\pi}\psi_U(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})$$

$$\cdot F(r,R,\overline{W})|D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})|^2 d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{5.3.14}$$

将(5.3.12)的值代入(5.3.14)，应用 Fubini 定理，得到 $\mathscr{A}(r,U)$ 等于

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}R\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}(2\pi)^n(n-1)!\cdots 2!\,1!}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int\cdots\int_{\pi\geq\theta_1\geq\cdots\geq\theta_n\geq-\pi}\psi_U(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})$$

$$\cdot p_r(\theta_1+\xi_1)\cdots p_r(\theta_n+\xi_n)\,D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}}$$

$$\cdot d\theta_1\cdots d\theta_n d\xi_1\cdots d\xi_n. \tag{5.3.15}$$

在上述积分中，先将 θ 的次序进行各种不同的排列之后对 ξ 进行相应的排列，得到 $\mathscr{A}(r,U)$ 等于

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}R\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}n!(n-1)!\cdots 2!\,1!(2\pi)^n}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int \phi_U(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})$$

$$D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})p_r(\theta_1+\xi_1)\cdots p_r(\theta_n+\xi_n)$$

$$\cdot D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}}d\theta_1\cdots d\theta_n d\xi_1\cdots d\xi_n. \tag{5.3.16}$$

取 $\lim\limits_{r\to 1} s_R^\phi(r,U)$，由 Lebesgue 从属定理及 Zygmund 关于多重 Fourier 级数的 Abel 求和定理(参阅 Chandrasekharan-Minakshisundaran [1]) 知道(5.3.16)当 $r\to 1$ 时为

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)i^{\frac{n(n-1)}{2}}R}{n!(n-1)!\cdots 2!\,2\pi^{\frac{n}{2}}}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int D(e^{i\xi_1},\cdots,e^{i\xi_n})\phi_U(e^{i\xi_1},\cdots,e^{i\xi_n})D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)$$

$$\cdot \frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}}d\xi_1\cdots d\xi_n. \tag{5.3.17}$$

于是得到(5.3.17)还可以表为

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)i^{\frac{n(n-1)}{2}}R}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-1)!\cdots 2!}\int\cdots\int_{\infty>\xi_1>\xi_2>\cdots>\xi_n>-\infty} D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\xi_n}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}}$$

$$\cdot D(e^{i\xi_1},\cdots,e^{i\xi_n})\phi_U(e^{i\xi_1},\cdots,e^{i\xi_n})d\xi_1\cdots d\xi_n \tag{5.3.18}$$

最后得到

定理 5.3.1 设 $u(U)$ 在 U_n 上可积，那么它的 Fourier 级数的某一种球平均(5.2.1)可以表为

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot R}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-1)!\cdots 2!}\int\cdots\int_{\infty>\xi_1>\cdots>\xi_n>-\infty} D(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\phi_U(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

$$\cdot D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}}d\xi_1\cdots d\xi_n. \tag{5.3.19}$$

这里

$$\phi_U(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\frac{1}{\omega_n'}\int_{[W]}u(WU)[\dot W].$$

而 W 的特征根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，且 $\lambda_j=e^{i\xi_j}$. 但是 $\phi(t)$ 必须满足(5.3.4)及(5.3.11)，且在每一有限区间绝对连续。

(5.3.19)还可以表成(参阅 Chandrasekharan-Minakshisundaran [1] 第IV 章)

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}R}{n!(n-1)!\cdots 2!1!}\int_0^\infty h_U(t)t^{n-1}dt, \tag{5.3.20}$$

这里

$$h_U(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_\sigma D(e^{it\eta_1},\cdots,e^{it\eta_n})\phi_U(e^{it\eta_1},\cdots,e^{it\eta_n})$$

$$\cdot\, \Gamma\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}}\bigg|_{\xi=t\eta}d\sigma_\eta. \tag{5.3.21}$$

但 σ 表示球面 $\eta_1^2+\cdots+\eta_n^2=1$。

§ 5.4 Riesz 平均的表达式

从上一节的结果，我们立刻得到(Bochner [1], Chadrasekharan-Minakshisundaran [1])。

(1) 当 $\varphi(t)=e^{-t}$，即 Abel 求和时，

$$H_\phi=H_R^\xi(u)=\frac{(n-1)!}{2^{n-2}\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2}\frac{v^{n-1}}{(1+v^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\cdot\exp\left(\sqrt{\frac{(2n-1)n(n-1)}{6R^2}}\right); \tag{5.4.1}$$

(2) 当 $\varphi(t)=e^{-t^2}$，即 Gauss-Sommerfeld 求和时，

$$H_\phi=H_R^\xi(u)=\frac{u^{n-1}R^{-\frac{v^2}{4}}}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\exp\left(\frac{(2n-1)n(n-1)}{6R^2}\right); \tag{5.4.2}$$

(3) 当 $\varphi(t)=\begin{cases}(1-t^2)^\delta, & 当\ 0\leqslant t<1\\ 0 & 当\ 1\leqslant t\end{cases}$

即 δ 次 Riesz 求和时，

$$H_\phi=H_R^\xi(u)=\frac{2^{\delta-\frac{n}{2}+1}\Gamma(\delta+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}u^{n-1}V_{\delta+\frac{n}{2}}(u)$$

$$\cdot\left(1-\frac{(2n-1)n(n-1)}{6R^2}\right)^{-\delta} \tag{5.4.3}$$

这里

$$V_s(u)=\frac{J_s(v)}{v^s},$$

而 J_s 为第一类 s 阶 Bessel 函数。

显然，这三个 $\varphi(t)$ 都在有限区间绝对连续，且均满足条件(5.3.4)，即

$$\int_0^\infty |\phi(t)|\, t^{\frac{n-1}{2}}\, dt<\infty$$

(对于 Riesz 求和，当 δ 大于 $\frac{n^2-1}{2}$ 时，$\phi(t)$ 满足 5.3.4)，至于条件(5.3.11)，在这三种情况，分别为

(1)

$$\frac{\partial^{j_1}}{\partial\xi_1^{j_1}}\cdots\frac{\partial^{j_n}}{\partial\xi_n^{j_n}}\cdot\frac{1}{(1+|\xi|^2R^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

当 $|\xi|=\infty$ 时，均为零，但 $0\leqslant j_1,\cdots,j_n\leqslant n-1$。

(2)

$$\frac{\partial^{j_1}}{\partial\xi_1^{j_1}}\cdots\frac{\partial^{j_n}}{\partial\xi_n^{j_n}}e^{-\frac{|\xi|^2R^2}{4}}$$

当 $|\xi|=\infty$ 时 均为零，但 $0\leqslant j_1,\cdots,j_n\leqslant n-1$；

(3)

$$\frac{\partial^{j_1}}{\partial\xi_1^{j_1}}\cdots\frac{\partial^{j_n}}{\partial\xi_n^{j_n}}V_{\delta+\frac{n}{2}}(|\xi|R).$$

当 $|\xi|=\infty$ 时，均为零，但 $0\leqslant j_1,\cdots,j_n\leqslant n-1$.

(1)(2)二种情况显然成立. 至于(3)，我们注意到

$$\frac{d}{x\,dx}V_\mu(x)=-V_{\mu+1}(x).$$

及当 $t\to\infty$ 时

$$J_\mu(t)=O(t^{-\frac{1}{2}}).$$

就能得到(5.3.11)成立。

于是得到：$u(U)$ 的 Fourier 级数的 Abel 平均(5.2.2)可以

表为

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}} R^n \exp\left(\sqrt{\frac{(2n-1)n(n+1)}{6R^2}}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-2)!\cdots 2!\,1!\,2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\int\cdots\int_{\infty>\xi_1>\cdots>\xi_n>-\infty} D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\cdot\frac{1}{(1+|\xi|^2R^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\cdot D(e^{i\xi_1},\cdots,e^{i\xi_n})\phi_U(e^{i\xi_1},\cdots,e^{i\xi_n})d\xi_1\cdots d\xi_n. \quad (5.4.4)$$

这还可以表成(5.3.20)，但 $h_U(t)$ 为

$$\exp\left(\sqrt{\frac{(2n-1)n(n+1)}{6R^2}}\right)\frac{(n-1)!R^{n-1}}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\cdot\int_\sigma D(e^{it\eta_1},\cdots,e^{it\eta_n})\phi_U(e^{it\eta_1},\cdots,e^{it\eta_n})$$

$$\cdot D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\frac{1}{(1+R^2|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\Bigg|_{\xi=t\eta}d\sigma_\eta. \quad (5.4.5)$$

$u(U)$ 的 Fourier 级数的 Gauss-Sommerfeld 平均(5.2.3)可以表为

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}} R^n \exp\left(\frac{(2n-1)n(n+1)}{6R^2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}(n-1)!\cdots 2!\,1!\,2^n}$$

$$\int\cdots\int_{\infty>\xi_1>\cdots>\xi_n>-\infty}\cdot D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)e^{-\frac{|\xi|^2R}{4}}D(e^{i\xi_1},\cdots,e^{i\xi_n})$$

$$\cdot\phi_U(e^{i\xi_1},\cdots,e^{i\xi_n})d\xi_1\cdots d\xi_n. \quad (5.4.6)$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}e^{-\frac{R^2|\xi|^2}{4}}=-\frac{R^2\xi_j}{2}e^{-\frac{R^2|\xi|^2}{4}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}e^{-\frac{R^2|\xi|^2}{4}}=\left(-\frac{R^2}{2}+\frac{R^4}{4}\xi_j^2\right)e^{-\frac{R^2|\xi|^2}{4}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

应用行列式性质，得到

$$D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)e^{-\frac{R^2|\xi|^2}{4}}=\left(-\frac{R^2}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}D(\xi_1,\cdots,\xi_n)e^{-\frac{R^2|\xi|^2}{4}}.$$

所以(5.2.3)可以表为

$$\frac{(-i)^{\frac{n(n-1)}{2}} R^{n^2}\exp\left(\frac{(2n-1)n(n-1)}{6R^2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}(n-1)!\cdots 2!1!2^{\frac{n(n+1)}{2}}} \cdot \int\cdots\int_{\infty>\xi_1>\cdots>\xi_n>-\infty} \cdot e^{-\frac{R^2|\xi|^2}{4}} D(\xi_1,\cdots,\xi_n) D(e^{i\xi_1},\cdots,e^{i\xi_n}) \cdot \phi_U(e^{i\xi_1},\cdots,e^{i\xi_n})d\xi_1\cdots d\xi_n. \tag{5.4.7}$$

这还可以表成(5.3.20)，但 $h_U(t)$ 为

$$\frac{\exp\left(\frac{(2n-1)n(n-1)}{6R^2}\right)(-i)^{\frac{n(n-1)}{2}} R^{n^2-1}}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}e^{\frac{R^2t^2}{4}}} \cdot \int_\sigma D(e^{it\eta_1},\cdots,e^{it\eta_n})D(\eta_1,\cdots,\eta_n)\phi_U(e^{it\eta_1},\cdots,e^{it\eta_n})d\sigma_\eta. \tag{5.4.8}$$

至于 $u(U)$ 的 Fourier 级数的 δ 次 Riesz 平均，当 $\delta > \frac{n^2-1}{2}$ 时，可以表为

$$\frac{\left(1-\frac{(2n-1)n(n+1)}{6R^2}\right)^{-\delta} \cdot R^n \cdot 2^{\delta-\frac{n}{2}} \cdot \Gamma(\delta+1)}{\pi^{\frac{n}{2}}(n-1)!\cdots 2!1!} \cdot \int\cdots\int_{\infty>\xi_1>\cdots>\xi_n>-\infty} D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)V_{\delta+\frac{n}{2}}(|\xi|R) \cdot D(e^{i\xi_1},\cdots,e^{i\xi_n})\phi_U(e^{i\xi_1},\cdots,e^{i\xi_n})d\xi_1\cdots d\xi_n. \tag{5.4.9}$$

这还可以表为(5.3.20)，但 $h_U(t)$ 为

$$\frac{\left(1-\frac{(2n-1)n(n+1)}{6R^2}\right)^{-\delta} \cdot 2^{\delta-\frac{n}{2}} \cdot \Gamma(\delta+1)R^{n-1}}{\pi^{\frac{n}{2}}} \cdot \int_\sigma D(e^{it\eta_1},\cdots,e^{it\eta_n})\phi_U(e^{it\eta_1},\cdots,e^{it\eta_n}) \cdot D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)V_{\delta+\frac{n}{2}}(|\xi|R)\big|_{\xi=t\eta}d\sigma_\eta. \tag{5.4.10}$$

§ 5.5 定理 5.2.2 的证明

我们首先证明以下的

定理 5.5.1 设 $\phi(t)$ 在有限区间绝对连续且满足(5.3.4)及(5.3.11)，那么当 $R^2 \geqslant \frac{(2n-1)n(n+1)}{6}$ 时，

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) i^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot R}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-1)!\cdots 2!\,1!} \int\cdots\int_{\infty>\xi_1>\cdots>\xi_n>-\infty} D\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right) \frac{H_\phi(|\xi| R)}{|\xi|^{n-1}} \cdot D(e^{i\xi_1}, \cdots, e^{i\xi_n}) d\xi_1 \cdots d\xi_n = 1. \tag{5.5.1}$$

证 (5.5.1)的左边就是

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(-i)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot R}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-1)!\cdots 2!\,1!} \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^0}{\partial \xi_1^0} \frac{\partial^1}{\partial \xi_2^1} \cdots \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_n^{n-1}} \cdot \frac{H_\phi(|\xi| R)}{|\xi|^{n-1}} D(e^{i\xi_1}, \cdots, e^{i\xi_n}) d\xi_1 \cdots d\xi_n,$$

由于 H_ϕ 满足(5.3.11)，所以上式就是

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) i^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot R}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-1)!\cdots 2!\,1!} \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_\phi(|\xi| R)}{|\xi|^{n-1}} \cdot \frac{\partial^0}{\partial \xi_1^0} \cdots \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_n^{n-1}} D(e^{i\xi_1}, \cdots, e^{i\xi_n}) \cdot d\xi_1 \cdots d\xi_n. \tag{5.5.2}$$

(5.5.2)还可以写成

$$R\int_0^{\infty} f_0(t) H_\phi(tR) dt. \tag{5.5.3}$$

这里

$$f_0(t) = \frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)!\cdots 2!\,1!\,2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_\sigma \frac{\partial^0}{\partial \xi_1^0} \frac{\partial^1}{\partial \xi_2^1} \cdots \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_n^{n-1}} \cdot D(e^{i\xi_1}, \cdots, e^{i\xi_n})\big|_{\xi=t\eta} d\sigma_\eta,$$

记 $f(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ 为

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!\cdots 2!\,1!} \frac{\partial^0}{\partial \theta_1^0} \frac{\partial^1}{\partial \theta_2^1} \cdots \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta_n^{n-1}} D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}).$$

它的多重 Fourier 级数为

$$\sum_{\nu_1, \cdots, \nu_n} b_{\nu_1, \cdots, \nu_n} e^{i(\nu_1\theta_1 + \cdots + \nu_n\theta_n)}. \tag{5.5.4}$$

显然，如果 $\nu^2 \neq \frac{(2n-1)n(n+1)}{6}$，那么 $b_{\nu_1, \cdots, \nu_n} = 0$，由于 $\phi(t)$ 满足(5.3.4)，所以(5.5.3)实际上就是 $f(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ 的多重 Fourier 级数(5.5.4)在 ϕ 意义下的球平均在 $\theta = 0$ 处的值（参阅 Bochner [1]），即(5.5.3)等于

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\substack{\nu_1, \cdots, \nu_n \\ \nu^2 = \nu_1^2 + \cdots + \nu_n^2}} \phi\left(\frac{\nu}{R}\right) b_{\nu_1, \cdots, \nu_n} e^{i(\nu_1\theta_1 + \cdots + \nu_n\theta_n)} \tag{5.5.5}$$

在 $\theta = 0$ 处的值。由于

$$\phi(t) = \varphi(t) / \varphi\left(\sqrt{\frac{(2n-1)n(n-1)}{6R^2}}\right),$$

所以得到当 $R^2 \geqslant \frac{(2n-1)n(n+1)}{6}$ 时(5.5.1)成立。

现在证明定理(5.2.2)

记

$$\varphi_U(e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}) = \frac{1}{\omega_n'} \int_{(W)} (u^*(WU) - u(V))[\dot{W}]. \tag{5.5.6}$$

于是根据定理 5.5.1，得到 $u(U)$ 的 Fourier 级数的 Gauss-Sommerfeld 平均(5.2.3) $G_R(U)$ 与 $u(U)$ 之差，即 $G_R(U) - u(U)$ 等于

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}} R}{n!(n-1)!\cdots 2!1!} \int_0^{\infty} h_U^{(2)}(t) t^{n-1} dt. \tag{5.5.7}$$

这里 $h_U^{(2)}(t)$ 等于

$$\exp\left(\frac{(2n-1)n(n-1)}{6R^2}\right) \frac{(-t)^{\frac{n(n-1)}{2}} R^{n^2-1}}{2^{\frac{n(n+1)}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} e^{\frac{R^2t^2}{4}}}$$

$$\cdot \int_{\sigma} \cdot D(e^{it\eta_1}, \cdots, e^{it\eta_n}) D(\eta_1, \cdots, \eta_n) \cdot \psi_U(e^{it\eta_1}, \cdots, e^{it\eta_n}) \cdot d\sigma_\eta \tag{5.5.8}$$

将(5.5.7)的积分分为三部分，即 $G_R(U)-u(U)$ 等于

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}R}{n!(n-1)!\cdots 2!1!}\left(\int_0^{\frac{1}{R}}+\int_{\frac{1}{R}}^{\eta}+\int_{\eta}^{\infty}\right)=I_1+I_2+I_3,$$

这里 η 为大于 $\frac{1}{R}$ 的一个固定常数.

先来考虑 I_1，设 $Rt=u$，于是 $h_U^{(2)}(t)$ 等于

$$\exp\left(\frac{(2n-1)n(n+1)}{6R^2}\right)c_1 u^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot R^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}\cdot e^{-\frac{u^2}{4}}$$

$$\cdot\int_\sigma D\left(e^{\frac{i\eta_1 u}{R}},\cdots,e^{\frac{i\eta_n u}{R}}\right)\cdot D(\eta_1,\cdots,\eta_n)$$

$$\cdot\varphi_U\left(e^{\frac{i\eta_1 u}{R}},\cdots,e^{\frac{i\eta_n u}{R}}\right)d\sigma_\eta,$$

这里 c_1 为绝对常数，根据 D 的定义，并注意到在 I_1 中 $0\leqslant u\leqslant 1$，所以

$$h_U^{(2)}(t)=o(u^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot R^{n-1}e^{-\frac{u}{4}})$$

这里用到了 $u(U)$ 的连续性，于是 I_1 等于

$$o\left(\int_0^1 e^{-\frac{u^2}{4}}u^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}du\right)=o(1)$$

至于 I_2，记

$$F(t)=\int_0^t |h_U^{(2)}(t)|t^{n-1}dt.$$

于是

$$F(t)\leqslant\frac{c_2R^{n^2-1}}{e^{\frac{R^2t^2}{4}}}\int\cdots\int_{\eta_1^2+\cdots+\eta_n^2<t^2}|D(e^{i\eta_1},\cdots,e^{i\eta_n})D(\eta_1,\cdots,\eta_n)$$

$$\cdot\varphi_U(e^{i\eta_1},\cdots,e^{i\eta_n})|d\eta_1\cdots d\eta_n,$$

这里 c_2 为绝对常数，由此得到当 $t\to 0$ 时

$$F(t)=o(R^{n^2-1}\cdot e^{-\frac{R^2t^2}{4}}t^{n^2}).$$

因此

$$|I_2|\leqslant c_3R\int_{\frac{1}{R}}^{\eta}dF(t)=c_3RF(t)\Big|_{\frac{1}{R}}^{\eta}.$$

上式右边为

$$o(R^{n^2}e^{-\frac{R^2\eta^2}{4}}\eta^{n^2})+o(1).$$

于是得到

$$I_2=o(1).$$

最后，对于 I_3，则有

$$|I_3|\leqslant c_4\int_\eta^\infty R^{n^2}t^{\frac{n^2+n}{2}}e^{-\frac{R^2t^2}{4}}dt=o(1).$$

这里 c_3，c_4 均为绝对常数，这样就证明了定理 5.2.2. 由于 $I_3=o(1)$ 的证明并未用到 $u(U)$ 的性质，以至事实上还证明了：$u(U)$ 的 Fourier 级数的 Gauss-Sommerfeld 求和是局部性质.

§5.6 定理 5.2.3 的证明

定理 5.2.3 的情形，我们先从 H_δ 的定义及(5.4.9)出发，根据 Bessel 函数的性质 (Erdelyi [1]，Chandrasekharan-Minakshisundaran [1])，我们知道

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi_j}V_{\delta+\frac{n}{2}}(|\xi|R)=-R^2\xi_jV_{\delta+\frac{n}{2}+1}(|\xi|R),\\
&\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}V_{\delta+\frac{n}{2}}(|\xi|R)=-R^2V_{\delta+\frac{n}{2}+1}(|\xi|R)\\
&\quad+R^4\cdot\xi_j^2V_{\delta+\frac{n}{2}+2}(|\xi|R)\\
&\frac{\partial^3}{\partial\xi_j^3}V_{\delta+\frac{n}{2}}(|\xi|R)=3R^4\xi_jV_{\delta+\frac{n}{2}+2}(|\xi|R)\\
&\quad-6R^6\xi_j^3\cdot V_{\delta+\frac{n}{2}+3}(|\xi|R)\\
&\frac{\partial^4}{\partial\xi_j^4}V_{\delta+\frac{n}{2}}(|\xi|R)=3R^4V_{\delta+\frac{n}{2}+2}(|\xi|R)\\
&\quad-6R^6\xi_j^2(|\xi|R)+R^8\xi_j^4V_{\delta+\frac{n}{2}+4}(|\xi|R),
\end{aligned}\right\}\tag{5.6.1}$$

由行列式的性质，容易证明

$$D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\frac{H_\delta(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}}=\frac{2^{\delta-\frac{n}{2}+1}\Gamma(\delta+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R^{n^2-1}\left(1-\frac{(2n-1)n(n+1)}{6R^2}\right)^{-\delta}$$

$$\cdot D(\xi_1, \cdots, \xi_n) V_{\delta+\frac{n^2}{2}}(|\xi| R).$$

根据定理5.5.1，得到 $u(U)$ 的 Fourier 级数的 δ 次 Riesz 平均 (5.2.4) $s_R^\delta(U)$ 在 $\delta > \frac{n^2-1}{2}$ 时与 $u(U)$ 之差，即 $s_R^\delta(U) - u(U)$ 等于

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}} R}{n!(n-1)!\cdots 2!1!} \int_0^\infty h_U^{(\delta)}(t) t^{n-1} dt, \tag{5.6.2}$$

这里 $h_U^{(\delta)}(t)$ 等于

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^{\delta-\frac{n}{2}} \Gamma(\delta+1) \pi^{-\frac{n}{2}}\left(1-\frac{(2n-1)n(n+1)}{6R^2}\right)^{-\delta}$$

$$\cdot R^{n^2-1} t^{\frac{n(n-1)}{2}} V_{\delta+\frac{n^2}{2}}(tR) \int_\sigma D(e^{it\eta_1}, \cdots, e^{it\eta_n})$$

$$\cdot \phi_U(e^{it\eta_1}, \cdots, e^{it\eta_n}) D(\eta_1, \cdots, \eta_n) d\sigma_\eta. \tag{5.6.3}$$

将(5.6.2)的积分分成三部分，即 $s_R^\delta(U) - u(U)$ 等于

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot R}{n!(n-1)!\cdots 2!1!}\left(\int_0^{\frac{1}{R}} + \int_{\frac{1}{R}}^\eta + \int_\eta^\infty\right) = I_1 + I_2 + I_3,$$

这里 η 为大于 $\frac{1}{R}$ 的一个固定常数。

先研究 I_1，作变换 $Rt = u$，于是

$$I_1 = \frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!(n-1)!\cdots 2!1!} \int_0^1 h_U^\delta(t) \frac{u^{n-1}}{R^{n-1}} du.$$

我们有

$$h_U^{(\delta)}\left(\frac{u}{R}\right) = o\left(R^{-\frac{n(n-1)}{2}} R^{n-1} \cdot R^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot u^{\frac{n(n-1)}{2}}\right),$$

所以得到

$$I_1 = o(1).$$

再来考虑 I_2，这时 $\frac{1}{R} \leqslant t \leqslant \eta$，同样根据 Bessel 函数的性质，

我们有

$$V_{\delta+\frac{n^2}{2}}(tR) = O\left((Rt)^{-\delta-\frac{n^2}{2}-\frac{1}{2}}\right). \tag{5.6.4}$$

因此

$$|h_U^{(3)}(t)| = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_\sigma |D(e^{it\eta_1},\cdots,e^{it\eta_n})\varphi_U(e^{it\eta_1},\cdots,e^{it\eta_n})|$$

$$\cdot\, d\sigma_\eta\, O(R^{-\delta+\frac{n^2}{2}-\frac{1}{2}-1}\, t^{-\delta-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}) \tag{5.6.5}$$

记

$$h_U^{(4)}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_\sigma |D(e^{it\eta_1},\cdots,e^{it\eta_n})$$

$$\cdot\,\varphi_U(e^{it\eta_1},\cdots,e^{it\eta_n})|\,d\sigma_\eta. \tag{5.6.6}$$

及

$$F(t) = \int_0^t h_U^{(4)}(t)t^{n-1}dt. \tag{5.6.7}$$

于是当 $t\to 0$ 时，我们有

$$F(t) = o\left(t^n t^{\frac{n(n-1)}{2}}\right) = o\left(t^{\frac{n(n+1)}{2}}\right), \tag{5.6.8}$$

从(5.6.2)，(5.6.5)，(5.6.6)及(5.6.7)得到

$$|I_2| = O\left(\int_{\frac{1}{R}}^{\eta} R^{-\delta+\frac{n^2}{2}-\frac{1}{2}}\, t^{-\delta-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\, dF(t)\right)$$

分部积分则等于

$$O\left(R^{-\delta-\frac{n^2}{2}-\frac{1}{2}}\, t^{-\delta-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\, F(t)\Big|_{\frac{1}{R}}^{\eta}\right)$$

$$+\,O\left(\int_{\frac{1}{R}}^{\eta} R^{-\delta+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\, t^{-\delta+\frac{n^2}{2}-\frac{3}{2}}\,dt\right) = o(1).$$

所以

$$I_2 = o(1).$$

至于 I_3，可以象处理 I_2 一样，只是在这时

$$F(t) = O(t^n). \tag{5.6.9}$$

于是

$$I_3 = o(R^{-\delta + \frac{n^2-1}{2}}).$$

这样就证明了定理 5.2.3. 注意到证明 $I_3 = o(1)$ 时是用(5.6.9)代替(5.6.8). 所以事实上还证明了 $u(U)$ 的 Fourier 级数的 δ 次 Riesz 求和是"局部"性质,但 $\delta > \frac{n^2-1}{2}$.

§ 5.7 一条一般的收敛定理

如果 $\phi(t)$ 在有限区间绝对连续,且满足(5.3.4)及(5.3.11),那么 $u(U)$ 的 Fouries 级数在 ϕ 意义下的球平均可以写成(5.3.18)或 (5.3.19).

事实上,这还可以写成(5.3.20),如果记(5.2.1)为 $s_R^\phi(U)$,那么根据定理 5.5.1, $s_R^\phi(U) - u(U)$ 可以写成

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}} R}{n!(n-1)!\cdots 2!1!} \int_0^\infty h_U^{(0)}(t) t^{n-1} dt, \tag{5.7.1}$$

$$h_U^{(0)}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_\sigma D(e^{it\eta_1}, \cdots, e^{it\eta_n}) \varphi_U(e^{it\eta_1}, \cdots, e^{it\eta_n})$$

$$\cdot D\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right) \frac{H_\phi(|\xi| R)}{|\xi|^{n-1}} \Bigg|_{\xi = t\eta} d\sigma_\eta.$$

这里 φ_U 由 5.5.6 所定义.

将(5.7.1)的积分分成三部分:

$$\frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot R}{n!(n-1)!\cdots 2!1!} \left(\int_0^{\frac{1}{R}} + \int_{\frac{1}{R}}^{\eta} + \int_{\eta}^{\infty}\right) = I_1 + I_2 + I_3.$$

这里 η 为大于 $\frac{1}{R}$ 的一个固定的数.

先来研究 I_1, 作变换 $Rt = u$, 于是

$$I_1 = \frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!(n-1)!\cdots 2!1!} \int_0^1 h_U^{(0)}\left(\frac{u}{R}\right) \frac{u^{n-1}}{R^{n-1}} du,$$

如果
$$h_U^{(\theta)}\left(\frac{u}{R}\right)=o(R^{n-1}) \tag{5.7.2}$$
那么就得到 $I_1=o(1)$. 但是
$$h_U^{(\theta)}\left(\frac{u}{R}\right)=O\left(R^{-\frac{n(n-1)}{2}}D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}}\Bigg|_{\xi=\frac{u\eta}{R}},$$
因而，若
$$D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}}\Bigg|_{\xi=\frac{u\eta}{R}}$$
$$=O\left(R^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}\right) \tag{5.7.3}$$
成立，那么(5.7.2)成立.

其次考虑 I_2. 如果此时
$$\left|D\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{(R|\xi|)^{n-1}}\right|\Bigg|_{\xi=t\eta}$$
$$=O\left(R^{-p-n}t^{-p-\frac{n(n+1)}{2}}\right). \tag{5.7.4}$$
那么
$$|I_2|=O\left(\int_{\frac{1}{R}}^{\eta}R^{-p}t^{-p-\frac{n(n+1)}{2}}dF(t)\right).$$
分部积分，即得
$$|I_2|=O\left(R^{-p}t^{-p-\frac{n(n+1)}{2}}F(t)\Big|_{\frac{1}{R}}^{\eta}+\left(p+\frac{n(n+1)}{2}\right)\right.$$
$$\left.\cdot\int_{\frac{1}{R}}^{\eta}R^{-p}t^{-p-\frac{n(n+1)}{2}-1}F(t)dt\right)=o(1),$$
如果 $p>0$.

至于 I_3，象处理 I_2 一样，只是此时
$$F(t)=o(t^n).$$
于是若(5.7.4)当 $\eta\leqslant t<\infty$ 时依然成立，但 $p>0$，那么
$$I_3=o(1).$$

综合起来，得到

定理 5.7.1 设 $u(U)$ 在 U_n 上连续，它的 Fourier 级数在 Φ

意义下的球平均为(5.2.1)，记作 $s_R^\Phi(U)$. 如果 $\Phi(t)$ 在任一有限区间绝对连续且满足(5.3.4)，(5.3.11)，此外，由 $\Phi(t)$ 决定的 H_Φ (见5.3.6)满足以下二个条件：

(1) 当 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{R}$ 时，

$$D\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right) \frac{H_\Phi(|\xi| R)}{|\xi|^{n-1}}\Bigg|_{\xi=t\eta}$$

$$= O\left(R^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}\right); \tag{5.7.5}$$

(2) 当 $\frac{1}{R} \leqslant t < \infty$ 时，

$$D\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right) \frac{H_\Phi(|\xi| R)}{|\xi|^{n-1}}\Bigg|_{\xi=t\eta}$$

$$= O\left(R^{-p-1} t^{-p+\frac{n(n+1)}{2}}\right). \tag{5.7.6}$$

而 $p > 0$，那么当 $R \to \infty$ 时 $s_R^\Phi(U)$ 收敛于 $u(U)$. 从此还可以看出，如果 $\Phi(t)$ 满足(5.3.4)，(5.3.11)，(5.7.5)及(5.7.6)，那么 Fourier 级数按照 Φ 的意义球求和是局部性质.

从定理 5.7.1，立刻导出定理 5.2.1. 因为

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j} \frac{1}{(1+R^2|\eta|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{-(n+1)R^2\eta_j}{(1+R^2|\eta|^2)^{\frac{n+3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta_j^2} \frac{1}{(1+R^2|\eta|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{-(n+1)R^2}{(1+R^2|\eta|^2)^{\frac{n+3}{2}}} + \frac{(n+1)(n+3)R^4\eta_j^2}{(1+R^2|\eta|^2)^{\frac{n+5}{2}}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

于是，定理 5.7.1 中的条件全部满足，此时 $p = -\frac{n(n+1)}{2}$.

§5.8 一条 Tauber 型收敛定理

在上一章中，用"方体"求和得到了一些逼近定理，对于球求

和，显然也有相应的结果．例如，可以有(参阅本书第一章)

定理 5.8.1 若 $u(U)\in \mathrm{Lip}\ p$，那么当 $\delta>\frac{n^2-1}{2}+p$ 时，有

$$s_R^\delta(U)-u(U)=o(R^{-p}). \tag{5.8.1}$$

从定理 5.2.3 的证明过程容易证明上述结果。

以此出发，可以证明以下一条收敛定理．

定理 5.8.2 若 $u(U)\in \mathrm{Lip}\ p$，且

$$N(f)\mathrm{tr}(C_{f_1,\cdots,f_n}\overline{C}'_{f_1,\cdots,f_n})=o((l_1^2+\cdots+l_n^2)^{-\alpha}). \tag{5.8.2}$$

这里

$$\alpha=n-\frac{2p(1+\beta)}{n^2-1-2\beta+2p+\varepsilon},\ \beta\geqslant 0,\varepsilon>0.$$

那么

$$s_R^\beta(U)-u(U)=o(1) \tag{5.8.3}$$

证 由(5.8.1)，得到当 $\delta>\frac{n^2-1}{2}+p$ 时，

$$s_R^\delta(U)-u(U)=O(R^{-p}).$$

当 $t=O(R)$ 时，

$$|s((R+t)^{\frac{1}{2}})-s(R^{\frac{1}{2}})|\leqslant\sum_{R\leqslant m\leqslant R+t}|A_m(U)|,$$

这里 $s(R)\equiv s_R^0(U)=s_R(U)$

$$A_m(U)=\sum_{\substack{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\\ m=l_1^2+\cdots+l_n^2}}\mathrm{tr}(C_{f_1,\cdots,f_n}\Phi'_{f_1,\cdots,f_n}(U)).$$

由 Schwarz 不等式

$$|\mathrm{tr}(C_{f_1,\cdots,f_n}\Phi'_{f_1,\cdots,f_n}(U))|^2\leqslant \mathrm{tr}(C_{f_1,\cdots,f_n}\overline{C}'_{f_1,\cdots,f_n})$$
$$\cdot\ \mathrm{tr}(\Phi_{f_1,\cdots,f_n}\overline{\Phi_{f_1,\cdots,f_n}(U)'})=\frac{N(f)}{C}\mathrm{tr}(C_{f_1,\cdots,f_n}\overline{C}'_{f_1,\cdots,f_n}).$$

根据(5.8.2)，我们有(参阅 Chandrasekharan-Minakshisundaran [1] 第 IV 章)

$$|s((R+t)^{\frac{1}{2}})-s(R^{\frac{1}{2}})|=o(\Sigma(l_1^2+\cdots+l_n^2)^{-\frac{\alpha}{2}})$$

$$= o\left(\sum_{R\leqslant m\leqslant R+t} r_n(m) m^{-\frac{\alpha}{2}}\right) = o\left(\int_R^{R+t} x^{-\frac{\alpha}{2}} dR_n(x)\right)$$

$$= o\left(tR^{\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{2}-1}\right).$$

这里 $r_n(m)$ 表示球面 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = m$ 的整点个数. 我们知道（参阅 Chandrasekharan-Minakshisundaran [1]），

$$r_n(m) = O(m^{\frac{n}{2}-1+\eta}), \quad \eta > 0$$

及

$$R_n(x) = \sum_{m\leqslant x} r_n(m) = \pi^{\frac{n}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\}^{-1} x^{\frac{n}{2}} + O(x^{\frac{n}{2}-\frac{n}{n+1}}).$$

应用 Chandrasekharan-Minakshisundaran [1] 中的定理 1.8.1，于是当 $0 \leqslant \beta < \delta$ 时，

$$s_R^\delta(U) - u(U) = o\left(R^{\frac{1}{\delta+1}\left\{-\delta+\beta+(\delta-\beta)\left(\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-p(1+\beta)\right\}}\right).$$

取

$$\alpha = n - \frac{p(1+\beta)}{\delta-\beta},$$

即得到(5.8.3)，但 $\delta > \frac{1}{2}(n^2-1)+p$. 现在，特别取

$$\delta = \frac{1}{2}(n^2-1)+p+\varepsilon,$$

这里 $\varepsilon > 0$，即得定理.

从上面的定理，立刻得到以下的定理，这个定理作为定理 5.2.3 的补充

定理 5.8.3 若 $u(U) \in \mathrm{Lip}\, p$，且

$$N(f)\mathrm{tr}(C_{f_1,\cdots,f_n}\overline{C}'_{f_1,\cdots,f_n}) = o(1). \tag{5.8.4}$$

那么当

$$\frac{n^2-1}{2} - \frac{p(n-1)^2}{2(n+p)} < \delta \leqslant \frac{n^2-1}{2},$$

而 $R \to \infty$ 时，$s_R^\delta(U)$ 以 $u(U)$ 为极限.

在定理 5.8.2 中取 $\beta = 0$，则得到一条收敛定理.

定理 5.8.4 若 $u(U) \in \mathrm{Lip}\, p$，且

$$N(f)\,\mathrm{tr}\,(C_{f_1,\cdots,f_n}\bar{C}_{f_1,\cdots,f_n}) = o((l_1^2 + \cdots + l_n^2)^{-\alpha}). \quad (5.8.5)$$

那么 $u(U)$ 的 Fourier 级数收敛于 $u(U)$ 自己，但

$$\alpha = n - \frac{2p}{n^2 - 1 + 2p + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

当然，所有定理中的条件：$u(U)$ 在 U_n 上连续，显然是可以减轻的. Fourier 级数的球求和理论，可以沿着本文的方法继续发展. 例如，建立绝对求和的概念，现在已无太大困难，求和的充要条件也是一样. 所有这些，可以参照 Bochner [1] 或 Chandrasekharan-Minakshisundaran [1].

第二部分　旋转群上的调和分析

第六章　旋转群上的 Fourier 级数的 Abel 求和

§6.1　旋转群上的调和分析

任意紧致李群的复表示，都等价于酉表示，所以任意紧致李群都可以嵌入到酉群中去．因此，酉群上调和分析的研究，对一般紧致李群的研究，也是有意义的．同样，任意紧致李群的实表示，都等价于正交表示，所以任意紧致李群都可以嵌入到正交群中去．因此，正交群上调和分析的研究，同样对一般紧致李群的研究也是有意义的．

在第一部分中，我们已经讨论了酉群上的调和分析，在这一部分中，我们自然要想到对正交群上的调和分析进行讨论．正交群的元素分成二部分，一部分是行列式为 $+1$ 的，另一部分是行列式为 -1 的．行列式为 $+1$ 的元素的全体，组成正交群的正规子群，即为旋转群．在这一部分中，我们在旋转群上讨论调和分析，即研究群 $SO(n)=O^{+}(n)=\{\Gamma|\Gamma\Gamma'=I, \det\Gamma=1\}$ 上的调和分析．

对于旋转群上的调和分析的研究，其基本的思想与方法是与第一部分相一致的．首先，在这一章中，由实典型域的 Poisson 核出发，给出旋转群上的 Fourier 级数的 Abel 求和，并具体给出 Abel 求和的系数．由于在第一章中所用的方法对旋转群已难于应用，所以采用母函数法来解决这一问题，这是钟家庆做的(见钟家庆 [2])．

以下七、八、九各章，基本上是按照第一部分中的第二、三、四、五各章的方法，并克服了旋转群所产生的困难而得到的，其中大部分工作是我指导研究生王世坤，董道珍[1,2,3]所完成的．

熟知 $SO(n)$ 中元素 Γ 的共轭类代表，视 n 为奇、偶而分为两种情形.

1. 当 $n=2k$ 时，

$$\Gamma \sim \begin{pmatrix} c(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & c(\theta_k) \end{pmatrix}, \quad c(\theta_i)=\begin{pmatrix} \cos\theta_i, & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i, & \cos\theta_i \end{pmatrix}.$$

2. 当 $n=2k+1$ 时

$$\Gamma \sim \begin{pmatrix} c(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & c(\theta_k) & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

$SO(n)$ 的单值不可约表示由 k 个非负整数

$m=(m_1,\cdots,m_k)$, $m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k\geqslant 0$ 表征，m 称为标签. 以 $m=(m_1,\cdots,m_k)$ 为标签的不可约表示的维数为 $N(m)$，表示的特征记作 $\sigma_m(\Gamma)$，它们又依 n 为奇、偶而分为两种情况：

I. $n=2k$.

当 $m_k=0$ 时，以 $m=(m_1,m_2,\cdots,m_{k-1},0)$ 为标签的单值不可约表示记为 $(\varphi_{ij}^m(\Gamma))_{1\leqslant i,j\leqslant N(m)}$. 记

$$c(l_1,\cdots,l_k)=\begin{vmatrix} c_{l_1}(\theta_1), & \cdots, & c_{l_1}(\theta_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{l_k}(\theta_1), & \cdots, & c_{l_k}(\theta_k) \end{vmatrix}. \tag{6.1.1}$$

这里 $l_1=m_1+k-1$, $l_2=m_2+k-2$, $\cdots$, $l_k=m_k$；当 $q>1$ 时，$c_q(\theta)=2\cos q\theta$；$c_0(\theta)=1$. 那么上述表示的特征 $\sigma_m(\Gamma)$ 为

$$[m]=\frac{c(l_1,\cdots,l_k)}{c(k-1,\cdots,1,0)}, \tag{6.1.2}$$

表示的维数 $N(m)$ 为

$$\lim_{\substack{\theta_1\to 0\\ \cdots\\ \theta_k\to 0}}[m]=\frac{2^{k-1}}{(2k-2)!\cdots 4!2!}\begin{vmatrix} l_1^{2k-2}, & \cdots, & l_k^{2k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ l_1^2, & \cdots, & l_k^2 \\ 1, & \cdots, & 1 \end{vmatrix}. \tag{6.1.3}$$

当 $m_k>0$ 时，以 $m=(m_1,\cdots,m_k)$ 为标签的单值不可约表示是有两个伴随不可约表示，分别记为 $(\phi_{ij}^m(\Gamma))$ 及 $(\phi_{ij}^{m'}(\Gamma))$，

它们的特征标分别为

$\sigma_m^{\varphi}(\Gamma)$ 及 $\sigma_m^{\psi}(\Gamma)$，而 $\sigma_m^{\varphi}(\Gamma)$ 为

$$[m]_+ = \frac{c(l_1, \cdots, l_k) + s(l_1, \cdots, l_k)}{2c(k-1, \cdots, 1, 0)}; \qquad (6.1.4)$$

$\sigma_m^{\psi}(\Gamma)$ 为

$$[m]_- = \frac{c(l_1, \cdots, l_k) - s(l_1, \cdots, l_k)}{2c(k-1, \cdots, 1, 0)}; \qquad (6.1.5)$$

这里 $c(l_1, \cdots, l_k)$ 由(6.1.1)所定义，

$$s(l_1, \cdots, l_k) = \begin{vmatrix} s_{l_1}(\theta_1), & \cdots, & s_{l_1}(\theta_k) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ s_{l_k}(\theta_1), & \cdots, & s_{l_k}(\theta_k) \end{vmatrix}. \qquad (6.1.6)$$

而 $l_1 = m_1 + k - 1$, $l_2 = m_2 + k - 2$, $\cdots$, $l_k = m_k$; $s_q(\theta) = 2i \sin q\theta$。这两个伴随不可约表示具有相同的维数，它由(6.1.3)所定义。

2. $n = 2k + 1$.

以 $m = (m_1, \cdots, m_k)$ 为标签的单值不可约表示记为

$$(\varphi_{ij}^{m}(\Gamma))_{1 \le i, j \le N(m)},$$

它的特征 $\sigma_m(\Gamma)$ 为

$$[m] = \frac{s\left(l_1 + \frac{1}{2}, \cdots, l_k + \frac{1}{2}\right)}{s\left(k - \frac{1}{2}, \cdots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}, \qquad (6.1.7)$$

表示的维数 $N(m)$ 为

$$\lim_{\substack{\theta_1 \to 0 \\ \cdots \\ \theta_k \to 0}} [m] = \frac{2^k}{(2k-1)! \cdots 3! 1!}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \left(l_1 + \frac{1}{2}\right)^{2k-1}, & \cdots, & \left(l_k + \frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ l_1 + \frac{1}{2}, & \cdots, & l_k + \frac{1}{2} \end{vmatrix}. \qquad (6.1.8)$$

$SO(n)$ 的体积 c 为

$$(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu-1)\right)}{\Gamma(\nu-1)}. \qquad (6.1.9)$$

若 $u(\Gamma)$ 为 $SO(2k)$ 上的可积函数，令

$$a_{ij}^{m}=\frac{1}{C}\int_{SO(2k)}u(\Gamma)\phi_{ij}^{m}(\Gamma)\dot{\Gamma}, \qquad (6.1.10)$$

当 $m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k\geqslant 0$；

$$b_{ij}^{m}=\frac{1}{C}\int_{SO(2k)}u(\Gamma)\psi_{ij}^{m}(\Gamma)\dot{\Gamma}, \qquad (6.1.11)$$

当 $m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k>0$. 记

$$\Phi_{m_1,\cdots,m_k}(\Gamma)=(\phi_{ij}^{m}(\Gamma))_{1\leqslant i,j\leqslant N(m)},$$

$$\Psi_{m_1,\cdots,m_k}(\Gamma)=(\psi_{ij}^{m}(\Gamma))_{1\leqslant i,j\leqslant N(m)},$$

$$A_{m_1,\cdots,m_k}=(a_{ij}^{m})_{1\leqslant i,j\leqslant N(m)},$$

$$B_{m_1,\cdots,m_k}=(b_{ij}^{m})_{1\leqslant i,j\leqslant N(m)},$$

则称

$$\sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k\geqslant 0}\sum_{i,j}^{N(m)}a_{ij}^{m}\phi_{ij}^{m}(\Gamma)+\sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k>0}\sum_{i,j}^{N(m)}b_{ij}^{m}\psi_{ij}^{m}(\Gamma)$$

$$=\sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k\geqslant 0}\mathrm{tr}\,(A_{m_1,\cdots,m_k}\Phi'_{m_1,\cdots,m_k}(\Gamma))$$

$$+\sum_{m_1\geqslant\cdots,m_k>0}\mathrm{tr}(B_{m_1,\cdots,m_k}\Psi'_{m_1,\cdots,m_k}(\Gamma)) \qquad (6.1.12)$$

为 $SO(2k)$ 上的函数 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数，$A_{m_1,\cdots,m_k}$，$B_{m_1,\cdots,m_k}$ 称为它的 Fourier 系数。

若 $u(\Gamma)$ 为 $SO(2k+1)$ 上的可积函数，令

$$a_{ij}^{m}=\frac{1}{C}\int_{SO(2k+1)}u(\Gamma)\varphi_{ij}^{m}(\Gamma)\dot{\Gamma}, \qquad (6.1.13)$$

同样记 $A_{m_1,\cdots,m_k}=(a_{ij}^{m})_{1\leqslant i,j\leqslant N(m)}$,

$$\Phi_{m_1,\cdots,m_k}(\Gamma)=(\varphi_{ij}^{m}(\Gamma))_{1\leqslant i,j\leqslant N(m)},$$

则称

$$\sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k\geqslant 0}\sum_{i,j}^{N(m)}a_{ij}^{m}\varphi_{ij}^{m}(\Gamma)=\sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k\geqslant 0}$$

$$\cdot \operatorname{tr}(A_{m_1,\cdots,m_k}\Phi'_{m_1,\cdots,m_k}(\Gamma)) \tag{6.1.14}$$

为 $SO(2k+1)$ 上的函数 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数，$A_{m_1,\cdots,m_k}$ 称为它的 Fourier 系数。

讨论形如

$$G = \Gamma M \Gamma' \tag{6.1.15}$$

的正交方阵 G 的集合，式中 $\Gamma \in SO(n)$，M 为

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta_1, & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1, & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} \cos\theta_2, & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2, & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \dotplus \cdots,$$

$$\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_k \geqslant 0, \tag{6.1.16}$$

当 $n=2k$ 时，此直和终止于 $\begin{pmatrix} \cos\theta_k, \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k \cos\theta_k \end{pmatrix}$；而当 $n=2k+1$ 时，它终止于

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix} \dotplus 1,$$

当 n 为奇数时，(6.1.15)包括所有的 $SO(n)$ 的方阵；当 n 为偶数时，任一属于 $SO(n)$ 的方阵可表为(6.1.15)的形式，但 $\det \Gamma$ 可能是 ± 1，因此，$V(G) = \frac{C}{2}$，于是 G 上任一点可以唯一地用 $\sum(=\Gamma/\Delta)$ 的一个傍集及一个 M 来表示(除去一些低维子流形以外)，其中

$$\Delta = \begin{pmatrix} \cos\delta_1, & \sin\delta_1 \\ -\sin\delta_1, & \cos\delta_1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} \cos\delta_2, & \sin\delta_2 \\ -\sin\delta_2, & \cos\delta_2 \end{pmatrix} \dotplus \cdots\cdots$$

G 上的体积元素为

当 $n=2k$ 时，

$$\dot{\Gamma}_{2k} = 2^{2k(k-1)+\frac{1}{2}k} \prod_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant k} (\cos\theta_\alpha - \cos\theta_\beta)^2 \dot{\sum} d\theta_1 \cdots d\theta_k; \tag{6.1.17}$$

当 $n=2k+1$ 时，

$$\dot{\Gamma}_{2k+1} = 2^{2k^2+\frac{1}{2}k} \prod_{i=1}^{k} (1-\cos\theta_i) \prod_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant k} \cdot (\cos\theta_\alpha - \cos\theta_\beta)^2 \dot{\sum} d\theta_1 \cdots d\theta_k \tag{6.1.18}$$

此处 $\dot{\sum}$ 为旁系的体积元素，当 $n=2k$ 时，旁系体积 $V(\sum)$ 为

$$2^{2k^2-2k}\pi^{k^2-\frac{1}{2}k}\prod_{\nu=2}^{2k}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu-1)\right)}{\Gamma(\nu-1)};$$

当 $n=2k+1$ 时，旁系体积 $V(\sum)$ 为

$$2^{2k^2}\pi^{k^2-\frac{k}{2}}\prod_{\nu=2}^{2k+1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu-1)\right)}{\Gamma(\nu-1)},$$

体积元素还可写成

$$\dot{\Gamma}_{2k}=2^{k^2-\frac{1}{2}k}c^2(k-1,\cdots,1,0)\dot{\sum}d\theta_1\cdots d\theta_k; \quad (6.1.19)$$

$$\dot{\Gamma}_{2k+1}=2^{k^2+\frac{1}{2}k}(-1)^k s^2\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\dot{\sum}d\theta_1\cdots d\theta_k \quad (6.1.20)$$

§6.2 实典型域的 Poisson 核

设 $X=(X_{\alpha\alpha})$ 是 $m\times n$ 矩阵，考虑 mn 维欧氏空间 $\mathbf{R}^{mn}$ 中的域 $\mathscr{R}(m,n)$ $(m\leqslant n)$:

$$I-XX'>0,$$

其特征流形为 $I=XX'$. $\mathscr{R}(m,n)$ 的解析自同构群为

$$W=(AX+B)(CX+D)^{-1}. \quad (6.2.1)$$

此处

$$A'A-C'C=I,\ B'B-D'D=-I,\ A'B=C'D \quad (6.2.2)$$

及

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=1.$$

我们只考虑 $m=n$ 的情形，记 $\mathscr{R}(n,n)$ 为 $\mathscr{R}_n$. 此时，可以如同 §1.1 那样，证明(6.2.1)将 $\mathscr{R}_n$ 映为 $\mathscr{R}_n$, $O(n)$ 映为 $O(n)$, $SO(n)$ 映为 $SO(n)$。

变换

$$Y = A(X - X_0)(I - X_0'X)^{-1}D^{-1} \tag{6.2.3}$$

将 X_0 变为 O 点，若 A，D 满足

$$A'A = (I - X_0X_0')^{-1}, \quad D'D = (I - X_0'X)^{-1}. \tag{6.2.4}$$

若 $\Gamma \in SO(n)$，则(6.2.3)在 $SO(n)$ 上为

$$\Gamma_1 = A(\Gamma - X_0)(I - X_0'\Gamma)^{-1}D^{-1}. \tag{6.2.5}$$

记 $\delta\Gamma = d\Gamma\Gamma'$，$\delta\Gamma_1 = d\Gamma_1\Gamma_1'$，$\dot{\Gamma}$ 为由 $\delta\Gamma$ 的微分向量所张成的体积元，$\dot{\Gamma}_1$ 为由 $\delta\Gamma_1$ 的微分向量所张成的体积元，则可如同在 §1.1 中所进行的那样，可以证明

$$\dot{\Gamma}_1 = \frac{\det(I - X_0X_0')^{\frac{n-1}{2}}}{\det(I - X_0\Gamma')^{n-1}}\dot{\Gamma}. \tag{6.2.6}$$

于是，如同在 §1.1 中那样，称

$$P(X_0, \Gamma) = \frac{\det(I - X_0X_0')^{\frac{n-1}{2}}}{\det(I - X_0\Gamma')^{n-1}}$$

为域 $\mathscr{R}_n$ 的 Poisson 核，于是我们可以得到 $\mathscr{R}_n$: $I - XX' > 0$ 上的 Poisson 积分

$$u(X) = \frac{1}{C}\int_{SO(n)} P(X, \Gamma)u(\Gamma)\dot{\Gamma}. \tag{6.2.7}$$

如同在 §0.3 中所说的那样，对于 $\mathscr{R}_n$ 应有相应的 Riemann 度量；并且有相应的 Laplace-Beltrami 算子．这时候(参阅华罗庚、陆启铿[1])相应的 Laplace-Beltrami 算子为

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\delta_{ij} - \sum_{\sigma=1}^{n} x_{i\sigma}x_{j\sigma}\right)\left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{k=1}^{n} x_{k\alpha}x_{k\beta}\right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_{i\alpha}\partial x_{j\beta}} - 2\sum_{k,\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n} x_{\beta\gamma}\left(\delta_{k\beta} - \sum_{\sigma=1}^{n} x_{k\sigma}x_{\beta\sigma}\right)\frac{\partial}{\partial x_{k\gamma}} \tag{6.2.8}$$

若 $u(x)$ 在 $\mathscr{R}_n$ 上定义，且有二阶连续偏微商，$u(x)$ 称为调和的，如果

$$\Delta u(x) = 0 \tag{6.2.9}$$

在 $\mathscr{R}_n$ 中成立．如同在 $\mathscr{R}_1$ 的情形一样，如下的 Dirichlet 问题有

解，在 $SO(n)$ 上已给一个连续函数，存在唯一的解满足方程 (6.2.9)，且在 $SO(n)$ 上的值等于已给函数，解就是 Poisson 积分 (6.2.7)。

如同在 §1.1 中证明定理 1.1.1 一样，我们可以证明

定理 6.2.1 若 $u(\Gamma_0)$ 是 $SO(n)$ 上的连续函数，则

$$u(\Gamma_0)=\lim_{r\to 1}\frac{1}{C}\int_{SO(n)}P(r\Gamma_0,\Gamma)u(\Gamma)\dot{\Gamma}. \qquad (6.2.10)$$

证明从略，读者很容易按照定理 1.1.1 的证明自己补出来，当然也容易将此定理推广到 Lebesgue 可积的情形。

§6.3 Poisson 核的展开

现在我们的任务是来展开 Poisson 核

$$P(r\Gamma_0,\Gamma)=\frac{(1-r^2)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\det(I-r\Gamma_0\Gamma')^{n-1}}=P(rI,\Gamma\Gamma_0'),$$

所以只要对 $P(rI,\Gamma)$ 进行展开就是了。

旋转群 $SO(n)$（当 n 为偶数时，记 $n=2k$；当 n 为奇数时，记 $n=2k+1$）以 $m=(m_1,\cdots,m_k)$，$m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots m_k\geqslant 0$ 为标签的单值不可约表示的特征为 $\sigma_m(\Gamma)$，则 $\sigma_m(\Gamma)$ 有以下的基本恒等式 (Murneghan [1]，255 页)：

令 $t_1,\cdots,t_k$ 是 k 个独立变量，作函数

$$f_i=f(t_i,\Gamma)=\det(I-t_i\Gamma),$$

则有

$$\frac{\prod\limits_{i\leqslant j}^{k}(1-t_it_j)}{f_1\cdots f_k}=\sum_{m\geqslant 0}\sigma_m(\Gamma)\chi_m(t). \qquad (6.3.1)$$

这里 $\chi_m(t)=A_{l_1,\cdots,l_k}(t_1,\cdots,t_k)/D_k(t_1,\cdots,t_k)$，

而

$$A_{l_1,\cdots,l_k}(t_1,\cdots,t_k)=\begin{vmatrix} t_1^{l_1}, & \cdots, & t_k^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ t_1^{l_k}, & \cdots, & t_k^{l_k}\end{vmatrix},$$

$$D_k(t_1, \cdots, t_k) = \begin{vmatrix} t_1^{k-1}, & \cdots, & t_k^{k-1} \\ t_1^{k-2}, & \cdots, & t_k^{k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & \cdots, & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i<j}^{k} (t_i - t_j),$$

$$l_i = m_i + k - i \qquad (i = 1, \cdots, k).$$

并且(6.3.1)当 $\max|t_i| < r < 1$ 时，对 Γ 是一致收敛的.

在 $SO(n)$ 上考虑的时候，当 $n = 2k+1$ 的情形，$\sigma_m(\Gamma)$ 由(6.1.7)给出；当 $n = 2k$ 的情形，而 $m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_{k-1} \geqslant m_k = 0$ 时，$\sigma_m(\Gamma)$ 由(6.1.2)给出；而当 $n = 2k$，$m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_k > 0$ 的情形，(6.3.1)应为

$$\frac{\prod\limits_{i\leqslant j}^{k} (1 - t_i t_j)}{f_1 \cdots f_k} = \sum_{m>0} \sigma_m^{\phi}(\Gamma) \chi_m(t) + \sum_{m>0} \sigma_m^{\psi}(\Gamma) \chi_m(t),$$

这里 $\sigma_m^{\phi}(\Gamma) = [m]_+$ 由(6.1.4)所给出，$\sigma_m^{\psi}(\Gamma) = [m]_-$ 由(6.1.5)所给出. 如果记

$$\sigma_m(\Gamma) = \sigma_m^{\phi}(\Gamma) + \sigma_m^{\psi}(\Gamma), \qquad (6.3.2)$$

则 $\sigma_m(\Gamma)$ 就是由(6.1.2)所定义的值.

所以，在 $SO(n)$ 的情形，(6.3.1)还是成立的，当 $n = 2k+1$ 时，$\sigma_m(\Gamma)$ 由(6.1.7)所定义；当 $n = 2k$ 时，$\sigma_m(\Gamma)$ 由(6.1.2)所定义，在以后的讨论中，我们都是这样定义 $\sigma_m(\Gamma)$ 的

代替(6.3.1)的左端，考虑

$$\frac{\prod\limits_{i\leqslant j}^{n-1} (1 - t_i t_j)}{f_1 \cdots f_{n-1}},$$

并令诸 $t_i = r$，那么

$$\left.\frac{\prod\limits_{i\leqslant j}^{n-1} (1 - t_i t_j)}{f_1 \cdots f_{n-1}}\right|_{t_1 = \cdots = t_{n-1} = r} = \frac{(1 - r^2)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\det^{n-1}(I - r\Gamma)} = P(rI, \Gamma).$$

$$(6.3.3)$$

因此，如果能将基本公式(6.3.1)由 k 推广到 $n-1$，$P(rI, \Gamma)$ 的

展开问题也就随之解决.

下面约定:

$$T_i = 1 + t_i^2, D_s(t) = \prod_{i<j}^{s} (t_i - t_j), L_s(t) = \prod_{i<j}^{s} (1 - t_i t_j),$$

$$\overline{L}_s(t) = \prod_{i\leqslant j}^{s} (1 - t_i t_j) = L_s(t) \prod_{i=1}^{s} (1 - t_i^2),$$

$$\langle g_1(t), \cdots, g_s(t)\rangle = \begin{vmatrix} g_1(t_1), & g_2(t_1), & \cdots, & g_s(t_1) \\ g_1(t_2), & g_2(t_2), & \cdots, & g_s(t_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1(t_s), & g_2(t_s), & \cdots, & g_s(t_s) \end{vmatrix},$$

$g_i(t)$ 是 t 的任意函数.

于是有

引理 6.3.1 设 $s > 0$, 则有恒等式

$$D_{s+1}(t) L_{s+1}(t) = \langle t^s, t^{s-1} T, t^{s-2} T^2, \cdots, T^s\rangle$$
$$= \langle t^s, t^{s-1} + t^{s+1}, t^{s-2} + t^{s+2}, \cdots, 1 + t^{2s}\rangle. \tag{6.3.4}$$

证 显然

$$\langle t^s, t^{s-1}T, \cdots, T^s\rangle = (T_1\cdots T_{s+1})^s \left\langle \left(\frac{t}{T}\right)^s, \left(\frac{t}{T}\right)^{s-1}, \cdots, \frac{t}{T}, 1\right\rangle$$

$$= (T_1\cdots T_{s+1})^s \prod_{i<j}^{s+1} \left(\frac{t_i}{T_i} - \frac{t_j}{T_j}\right) = \prod_{i<j}^{s+1} (t_i T_j - t_j T_i)$$

$$= \prod_{i<j}^{s+1} (t_i + t_i t_j^2 - t_j - t_j t_i^2) = \prod_{i<j}^{s+1} (t_i - t_j)$$
$$\cdot (1 - t_i t_j) = D_{s+1}(t) L_{s+1}(t).$$

至于 $\langle t^s, t^{s-1} T, \cdots, T^s\rangle = \langle t^s, t^{s-1} + t^{s+1}, \cdots, 1 + t^{2s}\rangle$ 只要将左端行列式中的每一列减去前面各列的适当线性组合即得右端.

引理 6.3.2 设 $s \geqslant k = \left[\frac{n}{2}\right]$, 如果已有

$$\frac{D_s(t)\overline{L}_s(t)}{f_1\cdots f_s} = \sum_{m\geqslant 0} \sigma_m(T)\langle g_1(t), \cdots, g_s(t)\rangle, \tag{6.3.5}$$

其中 $f_i=\det(I-t_i\Gamma)$，当 $n=2k+1$ 以及 $n=2k$，$m_1\geqslant\cdots\geqslant m_{k-1}\geqslant m_k=0$ 时，$\sigma_m(\Gamma)$ 是 $SO(n)$ 的以 $m=(m_1,\cdots,m_k)$ 为标签的不可约表示的特征；当 $n=2k$，$m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k>0$ 时，$\sigma_m(\Gamma)$ 是 $SO(n)$ 的以 $m=(m_1,\cdots,m_k)$ 为标签的不可约表示的特征 $\sigma_m^+(\Gamma)$ 与 $\sigma_m^-(\Gamma)$ 之和(6.3.2)，则有

$$\frac{D_{s+1}(t)\overline{L}_{s+1}(t)}{f_1\cdots f_{s+1}}=\sum_{m\geqslant 0}\sigma_m(\Gamma)\langle g_1(t)t,\cdots,$$

$$\cdot g_s(t)t,d(t)(1+t^2)^{s-k}\rangle. \tag{6.3.6}$$

其中

$$d(t)=\begin{cases}1-t^2 & 当\ \Gamma\in SO(2k);\\ 1+t & 当\ \Gamma\in SO(2k+1).\end{cases}$$

证 1°. 设 $\Gamma\in SO(2k)$，由

$$\Gamma\sim\begin{pmatrix}c(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & c(\theta_k)\end{pmatrix},\quad c(\theta_i)=\begin{pmatrix}\cos\theta_i, & \sin\theta_i\\ -\sin\theta_i, & \cos\theta_i\end{pmatrix}$$

有

$$f=\det(I-t\Gamma)=\prod_{i=1}^{k}(1-2t\cos\theta_i+t^2)$$

$$=\prod_{i=1}^{k}(1-2t\cos\theta_i+t^2)=\prod_{i=1}^{k}(T-2t\cos\theta_i)=T^k+\cdots$$

未写出的项是 $t^iT^{k-i}(i=1,\cdots,k)$ 的线性组合．于是

$$T^s=T^kT^{s-k}=T^{s-k}(f+\cdots)=T^{s-k}f+\cdots \tag{6.3.7}$$

未写出的项是 $t^iT^{s-i}(i=1,\cdots,k)$ 的线性组合，由引理 6.3.1 及(6.3.7)有

$$D_{s+1}(t)\overline{L}_{s+1}(t)=\langle t^s,t^{s-1}T,\cdots,T^s\rangle$$

$$=\langle t^s,t^{s-1}T,\cdots,tT^{s-1},T^{s-k}f\rangle=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{s+1-i}T_i^{s-k}$$

$$
f_i\cdot t_1\cdots\hat{t}_i\cdots t_{s+1}\begin{vmatrix} t_1^{s-1}, & t^{s-2}, & T_1, & \cdots, & t_1T_1^{s-2}, & T_1^{s-1}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{t}_i^{s-1}, & \hat{t}_i^{s-2}, & \cdots, & \hat{t}_i\hat{T}_i^{s-2}, & \hat{T}_i^{s-1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{s+1}^{s-1}, & t_{s+1}^{s-2}T_{s+1}, & \cdots, & t_{s+1}T_{s+1}^{s-2} & T_{s+1}^{s-1} & \end{vmatrix}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{s+1-i}T_i^{s-k}f_i t_1\cdots\hat{t}_i\cdots t_{s+1}D_s^{(i)}(t)L_s^{(i)}(t). \quad (6.3.8)
$$

这里 $\hat{t}_i$ 表示没有 t_i 项；$D_s^{(i)}(t)$ 表示 $(t_1\cdots,\hat{t}_i\cdots t_{s+1})$ 按 $D_s(t)$ 作出的差积，$L_s^{(i)}(t)$ 表示 $(t_1,\cdots,\hat{t}_i\cdots,t_{s+1})$ 按 $L_s(t)$ 作出的乘积，在上式两端乘以 $\prod_{i=1}^{s+1}(1-t_i^2)/f_1\cdots f_{s+1}$，注意到 $L_s(t)$ 和 $\overline{L}_s(t)$ 的关系，就知有

$$
\frac{D_{s+1}(t)\overline{L}_{s+1}}{f_1\cdots f_{s+1}}=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{s+1-i}T_i^{s-k}f_i t_1\cdots\hat{t}_i\cdots t_{s+1}
$$

$$
\cdot(1-t_i^2)\frac{D_s^{(i)}(t)\overline{L}_s^{(i)}(t)}{f_1f_2\cdots f_{s+1}}=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{s+1-i}
$$

$$
\cdot(1-t_i^2)T_i^{s-k}t_1\cdots\hat{t}_i\cdots t_{s+1}\frac{D^{(i)}(t)\overline{L}_s^{(i)}(t)}{f_1\cdots\hat{f}_i\cdots f_{s+1}}.
$$

根据引理假设

$$
\frac{D_s^{(i)}(t)\overline{L}_s^{(i)}(t)}{f_1\cdots\hat{f}_i\cdots f_{s+1}}=\sum_{m\geq 0}\sigma_m(\Gamma)\begin{vmatrix} g_1(t_1), & \cdots, & g_s(t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1(t_{i-1}), & \cdots, & g_s(t_{i-1}) \\ g_1(t_{i+1}), & \cdots, & g_s(t_{i+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1(t_{s+1}), & \cdots, & g_s(t_{i+1}) \end{vmatrix},
$$

因而

$$
\frac{D_{s+1}(t)\overline{L}_{s+1}(t)}{f_1f_2\cdots f_{s+1}}=\sum_{m\geq 0}\sigma_m(\Gamma)\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{s+1-i}T_i^{s-k}(1-t_i^2)
$$

$$\cdot t_1\cdots\hat{t}_i\cdots t_{s+1}\begin{vmatrix} g_1(t_1), & \cdots, & g_s(t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1(t_{i-1}), & \cdots, & g_s(t_{i-1}) \\ g_1(t_{i+1}), & \cdots, & g_s(t_{i+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1(t_{s+1}), & \cdots, & g_s(t_{s+1}) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{m\geqslant 0}\sigma_m(\Gamma)\langle g_1(t)\cdot t, g_2(t)t, \cdots, g_s(t)\cdot t, (1-t^2)T^{s-k}\rangle,$$

于是引理 $\Gamma\in SO(2k)$ 时成立.

2° 设 $\Gamma\in SO(2k+1)$ 由于

$$\Gamma \simeq \begin{pmatrix} c(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & c(\theta_k)_1 \end{pmatrix},$$

所以

$$f = \det(I - t\Gamma) = (1-t)\prod_{i=1}^{k}(1 - 2t\cos\theta_i + t^2)$$

$$= (1-t)h,$$

而

$$h = \prod_{i=1}^{k}(T - 2t\cos\theta_i) = T^k + \cdots.$$

因而 $T^s = T^{s-k}T^k = T^{s-k}h + \cdots$, 余下的证明和 1° 是完全类似, 即在 $D_{s+1}(t)L_{s+1}(t) = \langle t^s, t^{s-1}T, \cdots tT^{s-1}, T^s\rangle$ 中以 $T^{s-k}h$ 代替 T^s, 加以展开, 类似的得到

$$\frac{D_{s+1}(t)\overline{L}_{s+1}(t)}{f_1\cdots f_{s+1}} = \sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{s+1-i}T_i^{s-k}(1-t_i^2)$$

$$\cdot h_i t_1\cdots\hat{t}_i\cdots t_{s+1}\frac{D_s^{(i)}(t)\overline{L}_s^{(i)}(t)}{f_1\cdots f_{s+1}},$$

利用 $(1-t_i^2)h_i = (1+t_i)(1-t_i)h_i = (1+t_i)f_i$, 因而有

$$\frac{D_{s+1}(t)\overline{L}_{s+1}(t)}{f_1\cdots f_{s+1}} = \sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{s+1-i}(1+t_i)$$

$$\cdot T_i^{s-k} t_1 \cdots \hat{t}_i \cdots t_{s+1} \frac{D_i^{(i)}(t) \overline{L}_i^{(i)}(t)}{f_1 \cdots \hat{f}_i \cdots f_{s+1}}.$$

再利用引理假设，最后得到

$$\frac{D_{s+1}(t) \overline{L}_{s+1}(t)}{f_1 \cdots f_{s+1}}$$

$$= \sum_{m \geqslant 0} \sigma_m(\Gamma) \langle g_1(t) \cdot t, \cdots, g_s(t) \cdot t, (1+t)\Gamma^{s-k} \rangle$$

引理证完。

从(6.3.1)出发，将(6.3.1)改写成为

$$\frac{D_k(t) \overline{L}_k(t)}{f_1 \cdots f_k} = \sum_{m \geqslant 0} \sigma_m(\Gamma) \langle t^{l_1}, \cdots, t^{l_k} \rangle. \tag{6.3.9}$$

反复应用引理 6.3.2，对 $\sigma_m(\Gamma)$ 的系数可得以下序列：

$$\langle t^{l_1}, \cdots, t^{l_k} \rangle \xrightarrow{k+1} \langle t^{l_1+1}, \cdots, t^{l_k+1}, d(t) \rangle \xrightarrow{k+2} \langle t^{l_1+2}, \cdots,$$

$$t^{l_k+2}, d(t)t, d(t)(1+t^2) \rangle \xrightarrow{k+3} \cdots \xrightarrow{n-1} \langle t^{l_1+n-1-k}, \cdots, t^{l_k+n-1-k},$$

$$d(t)t^{n-k-2}, d(t)t^{n-k-3}(1+t^2), \cdots, d(t)(1+t^2)^{n-k-2} \rangle, \tag{6.3.10}$$

将(6.3.10)的最后一个记作 $c_{n-1}(t_1, \cdots, t_{n-1})$，那么以上的讨论可以总述成下面的定理。

定理 6.3.1 记号如引理 6.3.2．下列恒等式

$$\frac{\prod_{i<j}^{n-1} (t_i - t_j) \prod_{i \leqslant j}^{n-1} (1 - t_i t_j)}{f_1 f_2 \cdots f_{n-1}} = \sum_{m \geqslant 0} \sigma_m(\Gamma) c_{n-1}$$

$$\cdot (t_1, \cdots, t_{n-1}) \tag{6.3.11}$$

成立，其中 $f_i = \det(I - t_i \Gamma)$，$\Gamma \in SO(n)$，$c_{n-1}(t_1, \cdots, t_{n-1})$ 由(6.3.10)所示，当 $n = 2k+1$ 及 $n = 2k$，$m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_{k-1} \geqslant m_k = 0$ 时，$\sigma_m(\Gamma)$ 是 $SO(n)$ 的以 $m = (m_1, \cdots, m_k)$ 为标签的不可约表示的特征．当 $n = 2k$，$m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_k > 0$ 时，$\sigma_m(\Gamma)$ 是 $SO(n)$ 的以 $m = (m_1, \cdots, m_k)$ 为标签的不可约表示的特征 $\sigma_m^+(\Gamma)$ 及 $\sigma_m^-(\Gamma)$ 之和(6.3.2)。

由(6.3.11)得

$$\frac{\prod\limits_{i<j}^{n-1}(1-t_it_j)}{t_1\cdots t_{n-1}}=\sum_{m\geqslant 0}\sigma_m(\Gamma)\frac{c_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})}{D_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})}. \quad (6.3.12)$$

令 $t_1=t_2=\cdots=t_{n-1}=r$，由(6.3.3)得

$$P(rI,\Gamma)=\frac{(1-r^2)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\det^{n-1}(I-r\Gamma)}=\sum_{m\geqslant 0}\rho_m(r)\sigma_m(\Gamma), \quad (6.3.13)$$

其中

$$\rho_m(r)=\left.\frac{c_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})}{D_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})}\right|_{t_1=\cdots=t_{n-1}=r}. \quad (6.3.14)$$

于是我们有

系 6.3.1 $SO(n)$ 的 Poisson 核 $P(rI,\Gamma)$ 可以展开成不可约表示的特征的线性组合.

当 $n=2k+1$ 时，$P(rI,\Gamma)$ 的展开就是(6.3.13)，这里 $\sigma_m(\Gamma)$ 由(6.1.7)所定义，$\rho_m(r)$ 由(6.3.14)所定义。

当 $n=2k$ 时，$P(rI,\Gamma)$ 的展开为

$$P(rI,\Gamma)=\sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_{k-1}\geqslant m_k=0}\rho_m(r)\sigma_m(\Gamma)+\sum_{m>0}$$
$$\cdot\rho_m(r)(\sigma_m^{\phi}(\Gamma)+\sigma_m^{\psi}(\Gamma)), \quad (6.3.15)$$

这里 $\sigma_m^{\phi}(\Gamma)$，$\sigma_m^{\psi}(m)$ 分别由(6.1.4)及(6.1.5)所定义，$\sigma_m(\Gamma)$ 由(6.1.2)所定义，$\rho_m(r)$ 由(6.3.14)所定义.

§6.4 Abel 求和

在展开了 Poisson 核之后，就可以定义在 $SO(n)$ 上可积函数 $u(\Gamma)$ $(\Gamma\in SO(n))$ 的 Fourier 级数(6.1.12)及(6.1.14)的 Abel 平均.

当 $n=2k+1$ 时，由于

$$P(rI,\Gamma\Gamma_0')=\sum_{m\geqslant 0}\rho_m(r)\sigma_m(\Gamma\Gamma_0')=\sum_{m\geqslant 0}\rho_m(r)$$
$$\cdot\sum_{i,j}^{N(m)}\varphi_{ij}^m(\Gamma)\,\varphi_{ij}^m(\Gamma_0), \quad (6.4.1)$$

而由(6.2.7)，就有

$$u(r\Gamma_0)=\sum_{m\geq 0}\rho_m(r)\sum_{i,j}^{N(m)}\frac{a_{ij}^m}{N(m)}\varphi_{ij}^m(\Gamma_0)=\sum_{m\geq 0}\frac{\rho_m(r)}{N(m)}\cdot\sum_{i,j}^{N(m)}a_{ij}^m\varphi_{ij}^m(\Gamma_0). \tag{6.4.2}$$

(6.4.2)的右边的级数，就定义为 Fourier 级数. (6.1.14)的 Abel 平均.

当 $n=2k$ 时

$$P(rI,\Gamma\Gamma_0)=\sum_{m\geq 0}\rho_m(r)\sum_{i,j}^{N(m)}\phi_{ij}^m(\Gamma)\phi_{ij}^m(\Gamma_0)+\sum_{m>0}\cdot\rho_m(r)\sum_{i,j}^{N(m)}\phi_{ij}^m(\Gamma)\phi_{ij}^m(\Gamma_0), \tag{6.4.3}$$

而由(6.2.7)就有

$$u(r\Gamma_0)=\sum_{m\geq 0}\rho_m(r)\sum_{i,j}^{N(m)}\frac{a_{ij}^m}{N(m)}\phi_{ij}^m(\Gamma_0)$$

$$+\sum_{m>0}\rho_m(r)\sum_{i,j}^{N(m)}\frac{b_{ij}^m}{N(m)}\phi_{ij}^m(\Gamma_0)=\sum_{m\geq 0}\frac{\rho_m(r)}{N(m)}\sum_{i,j}^{N(m)}a_{ij}^m\phi_{ij}^m(\Gamma_0)$$

$$+\sum_{m>0}\frac{\rho_m(r)}{N(m)}\sum_{i,j}^{N(m)}b_{ij}^m\phi_{ij}^m(\Gamma_0). \tag{6.4.4}$$

(6.4.4)的右边的级数，就定义为 Fourier 级数(6.1.12)的 Abel 平均.

于是定理 6.2.1 可等价地叙述为

定理 6.4.1 若 $u(\Gamma_0)$ 是 $SO(n)$ 上的连续函数，则 $u(\Gamma_0)$ 的 Fourier 级数可以 Abel 求和于它自己.

当 $n=2k+1$ 时，在(6.2.7)中取 $u(\Gamma)=\sigma_n(\Gamma)$，$\Gamma_0=I$，则

$$u(rI)=\frac{1}{C}\int_{SO(n)}P(rI,\Gamma)\sigma_m(\Gamma)\dot{\Gamma}$$

$$= \sum_{m\geqslant 0}\rho_m(r)\frac{1}{C}\int_{SO(n)}\sigma_m(\Gamma)\sigma_m(\Gamma)\dot{\Gamma} = \rho_m(r),$$

所以当 $r\to 1$ 时，$\rho_m(r)\to\sigma_m(I) = N(m')$.

当 $n = 2k$ 时，而 $m_1\geqslant\cdots\geqslant m_{k-1}\geqslant m_k = 0$，取 $u(\Gamma) = \sigma_v(\Gamma)\cdot\Gamma_0 = I$；当 $n = 2k$，而 $m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k > 0$ 时，取 $u(\Gamma) = \sigma_v^{\phi}(\Gamma), \Gamma_0 = I$, $u(\Gamma) = \sigma_v^{\psi}(\Gamma), \Gamma_0 = I$；则同样可得 $\rho_v(r)$ 分别趋于 $\sigma_v(I) = N(v)$; $\sigma_v^{\phi}(I) = N(v)$ 及 $\sigma_v^{\psi}(I) = N(v)$. 也就是说，对任意标签 $m = (m_1,\cdots,m_k)$ 都有 $\rho_m(r)\to N(m)$, $(r\to 1)$. 以下要给出 $\rho_v(r)$ 的具体表达式.

由(6.3.10)，$c_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})$ 可以化为

$c_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1}) = \langle t^{l_1+n-1-k},\cdots,t^{l_k+n-1-k}, d(t)t^{n-k-2}, d(t)(t^{n-k-3}+t^{n-k-1}), d(t)(t^{n-k-4}+t^{n-k}),\cdots,d(t)(1+t^{(2n-2k-4)})\rangle$,

这里

$$d(t) = \begin{cases}1+t, & 当\ n = 2k+1;\\ 1-t^2, & \quad n = 2k.\end{cases}$$

下面分奇偶两种情形讨论:

1°. $n = 2k+1$

因为

$d(t)t^{n-k-2} = (1+t)^{n-k-2} = t^{n-k-2}+t^{n-k-1}$

$d(t)(t^{n-k-3}+t^{n-k-1}) = (1+t)(t^{n-k-3}+t^{n-k-1}) = t^{n-k-3}+t^{n-k}+(t^{n-k-2}+t^{n-k-1})$

$d(t)(t^{n-k-4}+t^{n-k}) = (1+t)(t^{n-k-4}+t^{n-k}) = t^{n-k-4}+t^{n-k+1}+(t^{n-k-3}+t^{n-k})$,

························

$d(t)(1+t^{2n-2k-4}) = (1+t)(1+t^{2n-2k-4}) = 1+t^{2n-2k-3}+(t+t^{2n-2k-4})$,

由行列式的性质，有

$c_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1}) = \langle t^{l_1+n-1-k},\cdots,t^{l_k+n-1-k}, d(t)t^{n-k-2}, d(t)(t^{n-k-3}+t^{n-k-1}),\cdots,d(t)(1+t^{2n-2k-4})\rangle = \langle t^{l_1+n-1-k},\cdots,$

$$t^{l_k+n-1-k},(t^{n-k-2}+t^{n-k-1}),(t^{n-k-3}+t^{n-k}),\cdots,(1+t^{2n-2k-3})\rangle=$$

$$\sum_{(p_1,\cdots,p_{n-k-1})\in D}(-1)^{p_1+\cdots+p_s-sk}\langle t^{l_1+n-1-k},\cdots,t^{l_k+n-1-k},t^{p_1},\cdots,$$

$$t^{p_{n-k-1}}\rangle. \tag{6.4.5}$$

这里指标集D满足条件：

1°. $2n-2k-3\geqslant p_1>p_2>\cdots>p_s\geqslant n-k-1>p_{s+1}>\cdots>p_{n-k-1}\geqslant 0$;

2°. 对任何 $i\neq j$，有 $p_i+p_j\neq 2n-2k-3$;

代入(6.3.13)，因而

$$p_{m(r)}=\frac{C_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})}{D_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})}$$

$$=\sum_{(p_1,\cdots,p_{n-k-1})\in D}(-1)^{p_1+\cdots+p_s-sk}\cdot\frac{1}{D_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})}$$

$$\cdot\langle t^{l_1+n-k-1},\cdots,t^{l_k+n-k-1},t^{p_1},\cdots t^{p_{n-k-1}}\rangle\Big|_{t_1=\cdots=t_n=r} \tag{6.4.6}$$

命

$$q_1=p_1-n+2+k,\ q_2=p_2-n+3+k,\ \cdots,\ q_{n-k-1}=p_{n-k-1},$$

而原知

$$l_1=m_1+k-1,\ l_2=m_2+k-2,\ \cdots,l_k=m_k.$$

则

$$\langle t^{l_1+n-1-k},\cdots,t^{l_k+n-1-k},t^{p_1},\cdots,t^{p_{n-k-1}}\rangle$$

$$=\langle t^{m_1+n-2},t^{m_2+n-3},\cdots,t^{m_k+n-k-1},t^{q_1+n-k-2},\cdots,t^{q_{n-k-1}}\rangle.$$

代入(6.4.6)，有

$$\rho_m(r)=\sum_{(q_1,\cdots,q_{n-k-1})\in D^*}(-1)^{q_1+\cdots+q_s-\frac{s(s+1)}{2}}\cdot\frac{1}{D_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})}$$

$$\cdot\langle t^{m_1+n-2},t^{m_2+n-3},\cdots,t^{m_k+n-k-1},t^{q_1+n-k-2},t^{q_{n-k-1}}\rangle\cdot\Big|_{t_1=\cdots=t_{n-1}=r}$$

$$=\sum_{(q_1,\cdots,q_{n-k-1})\in D^*}(-1)^{q_1+\cdots q_s-\frac{s(s+1)}{2}}\cdot r^{\sum_1^k m_i+\sum_1^{n-k-1}q_j}$$

$$N\cdot(m_1,\cdots,m_k,q_1,\cdots,q_{n-k-1}) \tag{6.4.7}$$

这里指标集 D° 是由 D 转化而来：$(q_1,\cdots,q_{n-k-1})\in D^\circ$ 当且仅当 $(p_1,\cdots,p_{n-k-1})\in D$。

易于验证：D° 的条件为

1°. $n-k-1\geqslant q_1\geqslant\cdots\geqslant q_s\geqslant s\geqslant q_{s+1}\geqslant\cdots$
$\geqslant q_{n-k-1}\geqslant 0$;

2°. 对任意 $i\neq j$, $q_i+q_j\neq i+j-1$;

而 $N(m_1,\cdots,m_k,q_1,\cdots,q_{n-k-1})$ 由 §1.2 中所定义，只是此时并不要求 $m_1,\cdots,m_k,q_1,\cdots,q_{n-k-1}$ 之间有大小的次序。(6.4.7) 就是 $n=2k+1$ 时 $SO(n)$ 的 $\rho_n(r)$ 的表达式

3°. $n=2k$

同样，由 $c_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})$ 的表达式，由于

$d(t)t^{n-k-2}=(1-t^2)t^{n-k-2}=t^{n-k-2}-t^{n-k}$,

$d(t)(t^{n-k-2}+t^{n-k-1})=(1-t^2)(t^{n-k-3}+t^{n-k-1})$
$=t^{n-k-3}-t^{n-k+1}$,

………………………………

$d(t)(1+t^{2n-2k-4})=(1-t^2)(1+t^{2n-2k-4})$
$=1-t^{2n-2k-2}-(t^2-t^{2n-2k-4})$,

所以由行列式的性质，有

$$c_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})=\langle t^{l_1+n-1-k},\cdots,t^{l_k+n-1-k},$$
$$d(t)t^{n-k-2},\cdots,d(t)(1+t^{2n-2k-4})\rangle=\langle t^{l_1+n-1-k},$$
$$\cdots,t^{l_k+n-1-k},(t^{n-k-2}-t^{n-k}),(t^{n-k-3}-t^{n-k-1}),\cdots,$$
$$(1-t^{2n-2k-2})\rangle=\sum_{(p_1,\cdots,p_{n-k-1})\in E}(-1)^{p_1+\cdots+p_s-s(k+1)}$$
$$\cdot\langle t^{l_1+n-1-k},\cdots,t^{l_k+n-1-k},t^{p_1},\cdots,t^{p_{n-k-1}}\rangle.$$

这里指标集 E 由以下条件确定：

1°. $2n-2k-2\geqslant p_1>\cdots>p_s\geqslant n-k$
$\geqslant p_{s+1}>\cdots>p_{n-k-1}\geqslant 0$;

2°. 对任意的 i, $p_i\neq n-k-1$;

3°. 对任意的 $i \neq j$，$p_i + p_j \neq 2n - 2k - 2$。

因而，$\rho_m(r)$ 为

$$\left.\frac{c_{n-1}(t_1, \cdots, t_{n-1})}{D_{n-1}(t_1, \cdots, t_{n-1})}\right|_{t_1=\cdots=t_{n-1}=r} = \sum_{(p_1,\cdots,p_{n-k-1})\in E} (-1)^{p_1+\cdots+p_s-s(k+1)}$$

$$\cdot \left.\frac{\langle t^{l_1+n-1-k}, \cdots, t^{l_k+n-1-k}, t^{p_1}, \cdots, t^{p_{n-k-1}}\rangle}{D_{n-1}(t_1, \cdots, t_{n-1})}\right|_{t_1=\cdots=t_{n-1}=r}.$$

类似地命

$$q_1 = p_1 - n + 2 + k, \quad q_2 = p_2 - n + 3 + k, \quad \cdots,$$

$$q_{n-k-1} = p_{n-k-1}.$$

而原知

$$l_1 = m_1 + k - 1, \cdots, l_k = m_k,$$

故

$$\langle t^{l_1+n-1-k}, \cdots, t^{l_k+n-1-k}, t^{p_1}, \cdots, t^{p_{n-k-1}}\rangle$$

$$= \langle t^{m_1+n-2}, t^{m_2+n-3}, \cdots, t^{m_k+n-k-1}, t^{q_1+n-k-2}, \cdots, t^{q_{n-k-1}}\rangle.$$

代入上式有

$$\rho_m(r) = \sum_{(q_1,\cdots,q_{n-k-1})\in \mathring{E}} (-1)^{q_1+\cdots+q_s-\frac{s(s+1)}{2}}$$

$$\cdot \left.\frac{\langle t^{m_1+n-2}, \cdots, t^{m_k+n-k-1}, t^{q_1+n-k-2}, \cdots, t^{q_{n-k-1}}\rangle}{D_{n-1}(t_1, \cdots, t_{n-1})}\right|_{t_1=\cdots=t_{n-1}=r}$$

$$= \sum_{(q_1,\cdots,q_{n-k-1})\in \mathring{E}} (-1)^{q_1+\cdots+q_s-\frac{s(s+1)}{2}}$$

$$\cdot N(m_1, \cdots, m_k, q_1, \cdots, q_{n-k-1})\, r^{\sum_1^k m_i + \sum_1^{n-k-1} q_j}. \tag{6.4.8}$$

这里指标集 $\mathring{E}$ 是由 E 转化而来：$(q_1, \cdots, q_{n-k-1}) \in \mathring{E}$ 当且仅当 $(p_1, \cdots, p_{n-k-1}) \in E$。容易验证：$\mathring{E}$ 的条件为

1°. $n - k \geq q_1 \geq \cdots \geq q_s \geq s + 1 \geq q_{s+1} \geq \cdots$
$\geq q_{n-k-1} \geq 0$;

2°. 对任意 i，$q_i \neq i$;

3°. 对任意 $i \neq j$，有 $q_i + q_j \neq i + j$.

(6.4.8)就是 $n = 2k$ 时，$SO(n)$ 的 $\rho_m(r)$ 的表达式。

将以上的讨论综合叙述为下面的定理(钟家庆[2]):

定理 6.4.2 旋转群 $SO(n)$ 的 Poisson 核 $P(rI,\Gamma)$ 有展开式(6.3.12)及(6.3.14). 而系数 $\rho_m(r)$ 为[1]

$$\rho_m(r)=\sum_{(q_1,\cdots,q_{n-k-1})\in\mathring{D}\text{或}\mathring{E}}(-1)^{q_1+\cdots+q_s-\frac{s(s+1)}{2}}$$

$$\cdot N(m_1,\cdots,m_k,q_1,\cdots,q_{n-k-1})\,r^{\sum\limits_1^k m_i+\sum\limits_1^{n-k-1}q_j}.$$

这里指标集当 n 为奇数时取 $\mathring{D}$; 当 n 为偶数时取 $\mathring{E}$, 而 $N(m_1,\cdots,m_k,q_1,\cdots,q_{n-k-1})$ 由 §1.2 中所定义, 只是此时并不要求 $m_1,\cdots,m_k,q_1,\cdots,q_{n-k-1}$ 之间有大小的次序.

下面指出: $\rho_m(r)$ 除了展开式的表达以外, 还可以用一个行列式表示, 为此, 回到(6.3.14)

$$\rho_m(r)=\left.\frac{c_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})}{D_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})}\right|_{t_1=\cdots=t_{n-1}=r},$$

利用著名的恒等式(华罗庚[1], 定理 1.2.4):

$$\lim_{\substack{x_1\to x\\ \cdots\\ x_n\to x}}\frac{\begin{vmatrix}f_1(x_1), & \cdots, & f_n(x_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_1(x_n), & \cdots, & f_n(x_n)\end{vmatrix}}{D_n(x_1,\cdots,x_n)}$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!2!\cdots(n-1)!}\cdot\begin{vmatrix}f_1(x), & \cdots, & f_n(x)\\ f_1'(x), & \cdots, & f_n'(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_1^{(n-1)}(x), & \cdots, & f_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix},$$

可以得到 $\rho_m(r)$ 的表达式为:

$$\rho_m(r)=\frac{(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}{1!2!\cdots(n-2)!}\begin{vmatrix}\xi_1(r), & \cdots, & \xi_{n-1}(r)\\ \xi_1'(r), & \cdots, & \xi_{n-1}'(r)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi_1^{(n-2)}(r) & \cdots, & \xi_{n-1}^{(n-2)}(r)\end{vmatrix},\quad(6.4.9)$$

---

1) 原文的符号有小误, 现改正.

这里

$$\xi_1(r)=r^{m_1+n-2},\ \xi_2(r)=r^{m_2+n-3},\cdots,\ \xi_k(r)=r^{m_k+n-k-1},$$

$$\xi_{k+1}(r)=\begin{cases}r^{n-k-2}+r^{n-k-1}, & \text{当 } n=2k+1;\\ r^{n-k-2}-r^{n-k}, & \text{当 } n=2k;\end{cases}$$

$$\xi_{k+2}(r)=\begin{cases}r^{n-k-3}+r^{n-k}, & \text{当 } n=2k+1;\\ r^{n-k-3}-r^{n-k-1}, & \text{当 } n=2k;\end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_{n-1}(r)=\begin{cases}1+r^{2n-2k-3}, & \text{当 } n=2k+1;\\ 1-r^{2n-2k-4}, & \text{当 } n=2k.\end{cases}$$

把最简单的情形——三维旋转群的 $\rho_m(r)$ 写出来，利用(6.4.9)，此时 $n=3$，$k=1$，不可约表示由一个非负整数 $m\geqslant 0$ 表征。

$$\xi_1(r)=r^{m+1},\qquad \xi_2(r)=1+r,$$

$$\rho_m(r)=(-1)\begin{vmatrix}r^{m+1}, & 1+r\\ (m+1)r^m, & 1\end{vmatrix}=(m+1)r^m+mr^{m+1}.$$

有关旋转群上的 Fourier 级数的 Abel 求和是由钟家庆[2]所做的，此外他在[2]中还做了些有关群表示论的工作。

第七章 旋转群上的 Fourier 级数的 Cesàro 求和

§7.1 Cesàro 求和的定义和核

如同第二章那样，可以考虑旋转群上的 Fourier 级数的 Cesàro 求和。

若 $u(\Gamma)$ 为 $SO(n)$ 上可积函数，$\Gamma \in SO(n)$，它的 Fourier 级数(6.1.14)，(6.1.12)的 Cesàro (c, α) 平均定义为

$$\sum_{(n-1)N \geqslant m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_k \geqslant 0} B_m^\alpha \sum_{i,j}^{N(m)} a_{ij}^m \varphi_{ij}^m(\Gamma) \tag{7.1.1}$$

及

$$\sum_{(n-1)N \geqslant m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_k \geqslant 0} B_m^\alpha \sum_{i,j}^{N(m)} a_{ij}^m \phi_{ij}^m(\Gamma) + \sum_{(n-1)N \geqslant m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_k \geqslant 0} \cdot B_m^\alpha \sum_{i,j}^{N(m)} b_{ij}^m \psi_{ij}^m(\Gamma), \tag{7.1.2}$$

这里

$$B_m^\alpha = \frac{1}{N(m)C} \int_{SO(n)} \sigma_m(\Gamma) K_N^\alpha(\Gamma) \dot{\Gamma}, \tag{7.1.3}$$

这里 $\sigma_m(\Gamma)$ 由 §6.3 中定义，C 为 $SO(n)$ 的体积，$N(m)$ 为 $SO(n)$ 的以 $m = (m_1, \cdots, m_k)$ 为标签的不可约表示的维数，$K_N^\alpha(\Gamma)$ 为 Cesàro (c, α) 求和的核，它等于

$$\frac{1}{B_N^\alpha} \det{}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{A_N^\alpha I + \sum_{j=1}^{N} (\Gamma^j + \Gamma'^j) \sum_{\nu=0}^{N-j} A_\nu^{\alpha-1}}{A_N^\alpha} \right), \tag{7.1.4}$$

而

$$B_N^a = \frac{1}{C}\int_{SO(n)} \det^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{A_N^a I + \sum\limits_{j=1}^{N}(\Gamma^j + \Gamma'^j)\sum\limits_{\nu=0}^{N-j} A_\nu^{a-1}}{A_N^a}\right)\dot{\Gamma},$$

(7.1.5)

$$A_N^a = C_N^{N+a} = \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+N)}{N!}, \quad (a > -1)$$

当 $n=2k$ 时，(7.1.4)还可写成(除去一低维流形)

$$\frac{\det^{\frac{n-1}{2}}\left((I-\Gamma)^{-1}\left(\sum\limits_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{\nu-1}\Gamma'^{\nu}(1-\Gamma^{2\nu+1})\right)\right)}{B_N^a(2A_N^a)^{\frac{n(n-1)}{2}}},$$

(7.1.5)成为

$$B_N^a = \frac{1}{C}\int_{SO(n)} \frac{\det^{\frac{n-1}{2}}\left((I-\Gamma)^{-1}\left(\sum\limits_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{a-1}\Gamma'^{\nu}(I-\Gamma^{2\nu+1})\right)\right)}{(2A_N^a)^{\frac{n(n-1)}{2}}}\dot{\Gamma}.$$

定理 7.1.1　(7.1.1)(7.1.2)均可表为

$$\frac{1}{C}\int_{SO(n)} u(W\Gamma)K_N^a(W)\dot{W}. \tag{7.1.6}$$

证　仅证 $n=2k$ 的情形，若 $\Gamma \in SO(n)$，$\Gamma \sim c(\theta_1)+\cdots+c(\theta_k)$，易证

$$\sum_{(n-1)N \geqslant m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_k \geqslant 0} B_m^a N(m)\sigma_m(\Gamma) = K_N^a(\Gamma). \tag{7.1.7}$$

事实上，上式两边乘以 $c(k-1,\cdots,1,0)$，则两边都是 $\theta_1,\cdots\theta_k$ 的多重三角多项式，由(7.1.2)得到

$$B_m^a N(m) = \frac{1}{(2\pi)^k}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \cos l_1\theta_1\cdots\cos l_k\theta_k K_N^a(\Gamma)$$
$$\cdot c(k-1,\cdots,1,0)\,d\theta_1\cdots d\theta_k.$$

即两边的三角多项式的系数是相等的，所以(7.1.7)成立。

由第六章知道，(7.1.1)(7.1.2)就是

$$\frac{1}{C}\int_{SO(n)} u(\dot{W}\Gamma)\Big(\sum_{(n-1)N\geq m_1\geq\cdots\geq m_k\geq 0} B_m^\alpha N(m)\sigma_m(\dot{W})\Big)\dot{W}.$$

由(7.1.7)，此即(7.1.6).

可以看出，这样所定义的 Cesàro (c, α) 和，当 α 趋于无穷时，即为第六章中的 Abel 和；(c, α) 核也成为 Poisson 核.

如果当 N 趋于无穷时，(7.1.1)及(7.1.2)的极限是存在的，那么称 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数是可以 (c, α) 求和的.

§7.2 Cesàro 核的半定正性

我们将证明(王世坤，董道珍[2])

定理 7.2.1 若 $u(\Gamma)$ 是 $SO(n)$ 上的连续函数，$\Gamma\in SO(n)$，那么它的 Fourier 级数可以 (c, α) 求和于它自己，但 $\alpha>\frac{n-2}{n-1}$.

为此，先证当 $\alpha>\frac{n-2}{n-1}$ 时，Cesàro 核是"半定正的".

定理 7.2.2 (c, α) 核 $K_N^\alpha(\Gamma)$ 是半定正的，若 $\alpha>\frac{n-2}{n-1}$，即

$$\int_{SO(n)} |K_N^\alpha(\Gamma)|\dot{\Gamma}\leqslant M, \tag{7.2.1}$$

这里 M 只与 n，α 有关，而与 N 无关.

证 当 $n=2k+1$ 时，$K_N^\alpha(\Gamma)$ 是非负的，(7.2.1)显然成立.

当 $n=2k$ 时，$k=1$，(7.2.1)是显然的. 假设(7.2.1)对小于 k 的自然数都成立，证(7.2.1)对 k 也成立.

由于当 N 趋于无穷时，B_N^α 不趋于零. 因此，只要证明

$$I=\int\cdots\int_{\pi\geq\theta_1\geq\cdots\geq\theta_k\geq 0} |\sigma_N^\alpha(\theta_1)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_k)|^{2k-1}$$

$$\cdot D^2(\cos\theta_1, \cdots, \cos\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k \tag{7.2.2}$$

有界即可，这里

$$\sigma_N^\alpha(\theta) = \frac{1}{A_N^\alpha \sin\frac{\theta}{2}} \operatorname{Im} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{\alpha-1} e^{i(\nu+\frac{1}{2})\theta}.$$

取 $\delta \geqslant \frac{1}{N}$ 将积分区域分解为

$$R_1:\ \delta \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots, \geqslant \theta \geqslant 0,$$

$$R_2:\ \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_k \geqslant 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_k:\ \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_{k-1} \geqslant \delta \geqslant \theta_k \geqslant 0,$$

$$R_{k+1}:\ \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots, \cdots \geqslant \theta_k \geqslant \delta.$$

记(7.2.2)的积分，其积分区域在 R_j 上者为 I_j，于是

$$I = I_1 + \cdots + I_{k+1}.$$

先考虑 I_2，

$$I_2 = \int_{R_2} \left|\sigma_N^\alpha(\theta_1)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_k)\right|^{2k-1} D^2(\cos\theta_1, \cdots, \cos\theta_k)$$

$$\cdot\, d\theta_1 \cdots d\theta_k = \underset{\delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_k \geqslant 0}{\int\cdots\int} \left|\sigma_N^\alpha(\theta_2)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_k)\right|^{2k-1}$$

$$\cdot\, D^2(\cos\theta_2, \cdots, \cos\theta_k)\, d\theta_2 \cdots d\theta_k \int_\delta^\pi \left|\sigma_N^\alpha(\theta_1)\right|^{2k-1}$$

$$\cdot \prod_{j=2}^{k} (\cos\theta_1 - \cos\theta_j)^2\, d\theta_1,$$

由于

$$\prod_{j=2}^{k} (\cos\theta_1 - \cos\theta_j)^2 = \prod_{j=2}^{k} ((1-\cos\theta_1) - (1-\cos\theta_j))^2$$

$$= \sum_{s_1+\cdots+s_k=2(k-1)} a_{s_1\cdots s_k} (1-\cos\theta_1)^{s_1} (1-\cos\theta_2)^{s_2} \cdots$$

$$\cdot\, (1-\cos\theta_k)^{s_k}.$$

这里 $a_{s_1\cdots s_k}$ 为只与 $s_1, \cdots, s_k$ 有关的绝对常数。因此，

$$I_2 \leqslant \sum_{s_1+\cdots+s_k=2(k-1)} |a_{s_1\cdots s_k}| \underset{\delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_k \geqslant 0}{\int\cdots\int} (1-\cos\theta_2)^{s_2} \cdots$$

$$\cdot (1-\cos\theta_k)^{s_k}|\sigma_N^\alpha(\theta_2)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_k)|^{2k-1}$$

$$\cdot D^2(\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_k)d\theta_2\cdots d\theta_k\int_\delta^\pi(1-\cos\theta_1)^{s_1}$$

$$\cdot |\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^{2k-1}d\theta_1.$$

取上式右边的任意一个积分，记作

$$I_{s_1\cdots s_k}=\int_\delta^\pi(1-\cos\theta_1)^{s_1}|\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^{2k-1}d\theta_1$$

$$\cdot\underset{\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_k\geqslant 0}{\int\cdots\int}(1-\cos\theta_2)^{s_2}\cdots(1-\cos_k)^{s_k}|\sigma_N^\alpha(\theta_2)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_k)|^{2k-1}$$

$$\cdot D^2(\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_k)d\theta_2\cdots d\theta_k.$$

由于 $\delta\geqslant\frac{1}{N}$，所以

$$|\sigma_N^\alpha(\theta)|=O(N^{-\alpha}|\theta|^{-\alpha-1}).$$

因此，

$$I_{s_1\cdots s_k}=O\left(\int_\delta^\pi N^{-\alpha(2k-1)}\theta^{-\alpha(2k-1)-(2k-1)+2s_1}d\theta N^{2(k-1)}\delta^{2(s_1+\cdots+s_k)}\right),$$

这里用到了归纳假定．由于

$$\alpha>\frac{n-2}{n-1}=\frac{2k-2}{2k-1},\ 0\leqslant s_1\leqslant 2(k-1),$$

$$s_1+\cdots+s_k=2(k-1),$$

所以

$$I_{s_1\cdots s_k}=O((N\delta)^{-\alpha(2k-1)+(2k-2)}).$$

于是得到

$$I_2=O((N\delta)^{-\alpha(2k-1)+2k-2}).$$

再考虑 I_3，代替 R_3 以更大区域 $R_3^*=(\pi\geqslant\theta_1\geqslant\delta)\cdot(\pi\geqslant\theta_2\geqslant\delta)\cdot\delta\geqslant\theta_3\geqslant\cdots\geqslant\theta_k\geqslant 0$．将(7.2.2)的积分，其积分区域在 R_3^* 上者，仍记以 I_3，于是

$$I_3=\frac{1}{(2\pi)^k}\underset{\delta\geqslant\theta_3\geqslant\cdots\theta_k\geqslant 0}{\int\cdots\int}|\sigma_N^\alpha(\theta_3)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_k)|^{2k-1}$$

$$D^2(\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_k)d\theta_3\cdots d\theta_k\cdot\int_\delta^\pi|\sigma_N^\alpha(\theta_2)|^{2k-1}$$

$$\cdot \prod_{j=3}^{k}(\cos\theta_2-\cos\theta_j)^2 d\theta_2 \int_\delta^\pi |\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^{2k-1} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=2}^{k}(\cos\theta_1-\cos\theta_j)^2 d\theta_1.$$

同样

$$\prod_{j=2}^{k}(\cos\theta_1-\cos\theta_j)^2 \prod_{l=3}^{k}(\cos\theta_2-\cos\theta_l)^2$$

$$=\prod_{j=2}^{k}((1-\cos\theta_1)-(1-\cos\theta_j))^2 \prod_{l=3}^{k}((1-\cos\theta_2)-(1-\cos\theta_l))^2=\sum_{t_1+\cdots+t_k=4k-6} b_{t_1\cdots t_k}(1-\cos\theta_1)^{t_1}\cdot(1-\cos\theta_2)^{t_2}\cdots(1-\cos\theta_k)^{t_k},$$

这里 $b_{t_1,\cdots,t_k}$ 为只与 $t_1,\cdots t_k$ 有关的绝对常数，而

$$\int_\delta^\pi (1-\cos\theta_1)^{t_1}|\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^{2k-1}d\theta_1 \int_\delta^\pi (1-\cos\theta_2)^{t_2} \cdot |\sigma_N^\alpha(\theta_2)|^{2k-1}d\theta_2 \int\cdots\int_{\delta\geq\theta_3\geq\cdots\geq\theta_k\geq 0}(1-\cos\theta_3)^{t_3}\cdots$$

$$\cdot(1-\cos\theta_k)^{t_k}|\sigma_N^\alpha(\theta_3)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_k)|^{2k-1}$$

$$\cdot D^2(\cos\theta_3,\cdots,\cos\theta_k)d\theta_3\cdots d\theta_k=O\int_\delta^\pi N^{-\alpha(2k-1)}$$

$$\cdot \theta_1^{-\alpha(2k-1)-(2k-1)+2t_1}d\theta_1 \int_\delta^\pi N^{-\alpha(2k-1)}\theta_2^{-\alpha(2k-1)-(2k-1)+2t_2}d\theta_2$$

$$\cdot N^{4(k-2)}\delta^{2(4k-6-t_1-t_2)}=O((N\delta)^{2(-(2k-1)\alpha+2k-4)}).$$

这里用到了归纳假设．所以得到

$$I_3=O((N\delta)^{2(-(2k-1)\alpha+2k-4)}).$$

同样可得

$$I_j=O((N\delta)^{(j-1)(-(2k-1)\alpha+2k-2j+2)}),\ j=4,\cdots,k,k+1.$$

最后来考虑 I_1.

$$I_1=\int_{\delta\geq\theta_1\geq\cdots\geq\theta_k\geq 0}|\sigma_N^\alpha(\theta_1)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_k)|^{2k-1}D^2(\cos\theta_1,\cdots,$$

$$\cos\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k\leqslant \int\cdots\int_{\delta\geq\theta_2\geq\cdots\geq\theta_k\geq 0}|\sigma_N^\alpha(\theta_2)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_k)|^{2k-1}$$

$$\cdot D^2(\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_k)d\theta_2\cdots d\theta_k \int_{\theta_1}^{\delta} |\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^{2k-1}$$

$$\cdot \prod_{j=2}^{k}(\cos\theta_1-\cos\theta_j)^2 d\theta_1 = O\Big(N^{2(k-1)}N^{2(k-1)}$$

$$\cdot \int_{\theta_1}^{\delta} |\sigma_N^\alpha(\theta_1)|d\theta_1 \delta^{4(k-1)} \int\cdots\int_{\delta\geq\theta_2\geq\cdots\geq\theta_k\geq 0} |\sigma_N^\alpha(\theta_2)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_k)|^{2k-3}$$

$$\cdot D^2(\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_k)d\theta_2\cdots d\theta_k)$$

$$= O\Big((N\delta)^{4(k-1)} \int\cdots\int_{\delta\geq\theta_2\geq\cdots\geq\theta_k\geq 0} |\sigma_N^\alpha(\theta_2)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_k)|^{2k-3}$$

$$\cdot D^2(\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_k)d\theta_2\cdots d\theta_k\Big).$$

由归纳假设，上式右边等于 $O((N\delta)^{4(k-1)})$。

总结起来

$$I = O((N\delta)^{4(k-1)}) + O((N\delta)^{-\alpha(2k-1)+2k-2}) + \cdots + O((N\delta)^{-k(2k-1)\alpha}).$$

取 $\delta = \frac{1}{N}$，即得

$$I = O(1).$$

这就证明了定理 7.2.2。

§7.3 Riesz 型定理的证明

现在来证定理 7.2.1。

由于

$$\frac{1}{C}\int_{SO(n)} K_N^\alpha(\Gamma)\dot{\Gamma} = 1$$

及(7.1.6)，得到

$$\sum_N^{\alpha}(\Gamma) - u(\Gamma) = \frac{1}{C}\int_{SO(n)} (u(W\Gamma)-u(\Gamma))K_N^\alpha(W)\dot{W}. \tag{7.3.1}$$

这里$\sum_N^{\alpha}(\Gamma)$ 表示$u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数的(c, α)和，要证明的是：当N趋于无穷时，(7.3.1)的右边趋于零. 以下仅证明$n=2k$的情形，n为奇数的情形可同样证明. (7.3.1)的右边的积分分成二部分，一部分在G上（G的定义见第六章 §6.1），另一部分不在G上. 先考虑在G上的那部分，这时只要证明，当N趋于无穷时，

$$I=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_k\geqslant 0}\varphi(\theta_1,\cdots,\theta_k)(\sigma_N^{\alpha}(\theta_1)\cdots\sigma_N^{\alpha}(\theta_k))^{2k-1}$$
$$\cdot D^2(\cos\theta_1,\cdots,\cos_k)d\theta_1\cdots d\theta_k \qquad (7.3.2)$$

趋于零即可，这里

$$\varphi(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\int_{\{\Sigma\}}(u(W\Gamma)-u(\Gamma))\dot{\Sigma}.$$

如同证明定理 7.2.2 一样，将积分区域

$$\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_k\geqslant 0$$

分解为 $R_1, R_2, \cdots, R_{k+1}$.

记(7.3.2)的积分，其积分区域在R_i上者为Q_i. 由于$u(\Gamma)$在$SO(n)$上连续，以至在$SO(n)$上，有

$$|\varphi(\theta_1,\cdots,\theta_k)|\leqslant L,$$

这里L是一绝对常数，选取$\delta\geqslant\frac{1}{N}$，这时

$$|Q_2|\leqslant\frac{L}{(2\pi)^k}\int\cdots\int_{\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_k\geqslant 0}|\sigma_N^{\alpha}(\theta_2)\cdots\sigma_N^{\alpha}(\theta_k)|^{2k-1}$$
$$\cdot D^2(\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_k)d\theta_2\cdots d\theta_k$$
$$\cdot\int_{\delta}^{\pi}|\sigma_N^{\alpha}(\theta_1)|^{2k-1}\prod_{j=2}^{k}(\cos\theta_1-\cos\theta_j)^2$$
$$\cdot d\theta_1=\frac{L}{(2\pi)^k}|I_2|,$$

这里I_2即为定理 7.2.1 的证明中的I_2. 因此，

$$|Q_2|=O((N\delta)^{-(2k-1)\alpha+2k-2}).$$

同样可证

$$|Q_j| = O((N\delta)^{(j-1)(-(2k-1)\alpha+2k-2j+2)}),\ j = 3,\cdots,k+1.$$

因此

$$\sum_{j=2}^{k+1} |Q_j| = \sum_{j=2}^{k+1} O((N\delta)^{(j-1)(-(2k-1)\alpha+2k-2j+2)}).$$

最后考虑 Q_1.

$$Q_1 = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\cdots\int_{\delta\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_k\geqslant 0} \varphi(\theta_1,\cdots,\theta_k)(\sigma_N^\alpha(\theta_1)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_k))^{2k-2}$$

$$\cdot D^2(\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_k)\,d\theta_1\cdots d\theta_k.$$

由于 $u(\Gamma)$ 在 $SO(n)$ 上连续，对任给的 $\eta > 0$，可选 δ 充分小，使当

$$\delta \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_k \geqslant 0$$

时，

$$|\varphi(\theta_1,\cdots,\theta_k)| < \eta.$$

由定理 7.2.1，当 $\alpha > \frac{n-2}{n-1}$ 时，

$$\frac{1}{C}\int_{SO(n)} |K_N^\alpha(\Gamma)|\dot{\Gamma} \leqslant M.$$

以至对任意 $\varepsilon > 0$，可选取 δ，充分小，使得

$$|Q_1| < \varepsilon/2.$$

选定了 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 之后，由于

$$\alpha(n-1) - (n-2) > 0.$$

因此，可以选取 N 充分大，使

$$|Q_2| + \cdots + |Q_{k+1}| < \varepsilon/2.$$

于是对于任给的 $\varepsilon > 0$，有

$$|I| < \varepsilon.$$

至于(7.3.1)的积分，其不在 G 上的部分，可同样处理. 这就证明了定理 7.2.1.

从定理的证明可以看出，条件"$u(\Gamma)$ 在 $SO(n)$ 上连续"可以

减弱为"$u(\Gamma)$ 在 $SO(n)$ 上有界可积"，那么 $\sum\limits_{N}^{\alpha}(\Gamma)$ 在 $u(\Gamma)$ 连续的那些点上，当 N 趋于无穷时还是趋于 $u(\Gamma)$.

定理 7.2.1 的条件 $\alpha > \frac{n-2}{n-1}$，当 $n=2$ 时，这是不能改进的，而当 $n=3$ 时，$\frac{n-2}{n-1}=\frac{1}{2}$，容易证明，当 $\alpha>0$ 时，定理还是成立的，当 $n\geqslant 4$ 时，α 还能否改进？这是个问题.

§ 7.4 Fejér 求和

当 $\alpha=1$ 时，Cesàro 求和便是 Fejér 求和，此时 Fejér 核较之一般的 (c,α) 核有着更简洁的形式. Riesz 型定理成为 Fejér 型定理：若 $u(\Gamma)$ 在 $SO(n)$ 上连续，那么它的 Fourier 级数可以 Fejér 求和于它自己.

Fejer 核为

$$K_N(\Gamma)=K_N^1(\Gamma)=\frac{1}{B_N}\left|\det\left(\frac{\sum\limits_{j=0}^{N}\Gamma^{j(N-j+1)}}{N+1}\right)\right|^{n-1}, \tag{7.4.1}$$

这里

$$B_N=B_N^1=\frac{1}{C}\int_{SO(n)}\left|\det\left(\frac{\sum\limits_{j=0}^{N}\Gamma^{j(N-j+1)}}{N+1}\right)\right|^{n-1}\dot{\Gamma}. \tag{7.4.2}$$

当 $n=2k$ 时，(7.4.1)成为(除了一低维流形外)

$$\frac{1}{B_N}\frac{1}{(N+1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left|\frac{\det(I-\Gamma^{N+1})}{\det(I-\Gamma)}\right|^{n-1},$$

而

$$B_N=\frac{1}{(N+1)^{\frac{n(n-1)}{2}}C}\int_{SO(n)}\left|\frac{\det(I-\Gamma^{N+1})}{\det(I-\Gamma)}\right|^{n-1}\dot{\Gamma}.$$

显然 Fejér 核是定正的，因此，当 $\alpha > 1$ 时，所有的 (c, α) 核都是定正的，当然利用 Fejér 核的定正性可直接证明 Fejér 型定理。

Fejér 求和的系数为

$$B_m = \frac{1}{N(m) B_N C} \int_{SO(n)} \sigma_m(\Gamma) \cdot \left| \det \left(\frac{\sum_{j=0}^{N} \Gamma^{j(N+1-j)}}{N+1} \right) \right|^{n-1} \dot{\Gamma}, \tag{7.4.3}$$

而 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数的 Fejér 和成为

$$\frac{1}{C B_N} \int_{SO(n)} u(W\Gamma) \left| \det \left(\frac{\sum_{j=0}^{N} W^{j(N+1-j)}}{N+1} \right) \right|^{n-1} \dot{W}.$$

§7.5 系数的具体表达式

本节计算出 B_m 和 B_N 的具体表达式，由此可看出如何写出一般的 B_m^{α} 和 B_N^{α} 的具体表达式。

由(7.4.3)知，当 $n = 2k$ 时，$B_m N(m)$ 等于

$$\frac{2^{\frac{k^2-k}{2}}}{B_N (N+1)^{k(2k-1)}} \det(a_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant k}, \tag{7.5.1}$$

其中

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[1 - \cos(N+1)\theta]^{2k-1}}{(1 - \cos\theta)^{2k-i}} \cos(l_j \theta) d\theta.$$

当 $n = 2k + 1$ 时，$B_m N(m)$ 等于

$$\frac{2^{\frac{k^2-k}{2}}}{B_N(N+1)^{k(2k-1)}}\det(b_{ij})_{1\leq i,j\leq k} \tag{7.5.2}$$

其中

$$b_{ij}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{[1-\cos(N+1)\theta]}{(1-\cos\theta)^{2k-i+1}}\sin\left(l_j+\frac{1}{2}\right)\theta\sin\frac{\theta}{2}d\theta.$$

记(7.5.1)的行列式元素为 $b_{jt}(j,t=1,\cdots,k)$，由于

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\cos(N+1)\theta)^{2k-1}}{(1-\cos\theta)^{2k-j}}\sin l_t\theta d\theta=0,$$

可表 b_{jt} 为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\cos(N+1)\theta)^{2k-1}}{(1-\cos\theta)^{2k-j}}e^{il_t\theta}d\theta.$$

此即

$$\frac{(-2)^{1-j}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-e^{i(N+1)\theta})^{4k-2}e^{il_t\theta}d\theta}{(1-e^{i\theta})^{4k-2j}e^{i((2k-1)N+j-1)\theta}}$$

$$=\lim_{r\to1}\frac{(-2)^{1-j}}{2\pi i}\int_r\frac{(1-z^{N+1})^{4k-2}dz}{(1-z)^{4k-2j}z^{(2k-1)N+j-l_t}}$$

这里 r 为 $|z|=r$，$z=re^{i\theta}$，$0<r<1$。而

$$\frac{(1-z^{N+1})^{4k-2}}{(1-z)^{4k-2j}z^{(2k-1)N+j-l_t}}$$

$$=\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{4k-2}\frac{(-1)^s(4k-2)!(4k-2j+e-1)!}{(4k-2-s)!(4k-2j-1)!s!e!}$$

$$\cdot z^{e+(N+1)s-(2k-1)Nj+l_t},$$

于是

$$b_{jt}=\sum_{\substack{s=0\\e\geq0}}^{4k-2}\frac{(-1)^s(4k-2)!(4k-2j+e-1)!(-2)^{1-j}}{(4k-2j-1)!(4k-2-s)!s!e!},$$

这里 $e=(2k-1)N-(N+1)s+j-l_t-1$，$(t=1,2,\cdots k)$。于是，$B_mN(m)$ 等于

$$\frac{[(4k-2)!]^k(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(2k-1)!(2k+1)!\cdots(4k-3)!B_N(N+1)^{k(2k-1)}}$$
$$\cdot\det(c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k} \tag{7.5.3}$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{\substack{s_j=0\\e_j\geqslant 1-i}}^{4k-2}\frac{(-1)^{s_j}(4k-2-i+e_j)!}{s_j!(4k-2-s_j)!(e_j-1+i)!}$$

式中 $e_t=(2k-1)N-(N+1)s_t-l_t(t=1,2,\cdots,k)$。

记(7.5.2)中行列式元素为 $a_{tj}(j,t=1,2,\cdots,k)$，类似计算可得

$$a_{tj}=\sum_{\substack{s=0\\e\geqslant 0}}^{4k}\frac{(-1)^s(4k)!(4k-2j+e)!(-2)^{1-j}}{(4k-s)!s!(4k-2j)!e!2},$$

这里 $e=2kN-(N+1)s-l_t+j-1$ $(t,j=1,2,\cdots k)$. 代人(7.5.2)式，即得，当 $n=2k+1$ 时，$B_mN(m)$ 等于

$$\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}((4k)!)^k}{(2k)!(2k+2)!\cdots(4k-2)!B_N(N+1)^{k(2k-1)}}\det(d_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k} \tag{7.5.4}$$

其中

$$d_{ij}=\sum_{\substack{s_j=0\\e_j\geqslant 1-i}}^{4k}\frac{(-1)^{s_j}(4k-1-i+e_j)!}{(4k-S_j)!s_j!(e_j+i-1)}$$

这里 $e_t=2kN-(N+1)s_t-l_t$ $(t=1,2,\cdots k)$.

如果我们约定：当 $Q>0$ 时，$\frac{1}{(-Q)!}=0$，则有

当 $n=2k$ 时，(7.5.3)为

$$\frac{((2k-1)!)^k(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}(N+1)^{-k(2k-1)}}{(2k-1)!(2k+1)!\cdots(4k-3)!B_N}$$

$$\sum_{\substack{s_1=0\\ l_1\geqslant 1-k}}^{4k-2}\cdots\sum_{\substack{s_k=0\\ l_k\geqslant 1-k}}^{4k-2}(-1)^{s_1+\cdots+s_k}C_{s_1}^{4k-2}\cdots C_{s_k}^{4k-2}C_{2k-1}^{2k-2+e_1}\cdots C_{3k-1}^{2k-2+e_k}A_{e_1,\cdots,e_k}^{s_1,\cdots,s_k}$$

当 $n=2k+1$ 时，(7.5.4)为

$$\frac{((2k)!)^k(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}(N+1)^{-k(2k-1)}}{(2k)!(2k+2)!\cdots(4k-2)!B_N}$$

$$\sum_{\substack{s_1=0\\ l_1\geqslant 1-k}}^{4k}\cdots\sum_{\substack{s_k=0\\ l_k\geqslant 1-k}}^{4k}(-1)^{s_1+\cdots+s_k}C_{s_1}^{4k}\cdots C_{s_k}^{4k}C_{3k}^{3k-1+e_1}\cdots C_{2k}^{2k-1+e_k}\tilde{A}_{e_1,\cdots,e_k}^{s_1,\cdots,s_k},$$

这里 $e_t=(n-1)N-(N+1)s_t-l_t\ (t=1,2,\cdots,k)$，而

$$A_{e_1,\cdots,e_k}^{s_1,\cdots,s_k}=\det(f_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k},\tag{7.5.5}$$

$f_{ij}=(4k-2-i+e_j)\cdots(3k-1+e_j)(e_j+i)\cdots(e_j+k-1)$，当 $i\neq k$

$f_{kj}=1$;

$$\tilde{A}_{e_1,\cdots,e_k}^{s_1,\cdots,s_k}=\det(g_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k},\tag{7.5.6}$$

$g_{ij}=(4k-1-i+e_j)\cdots(3k+e_j)(e_j+i)\cdots(e_j+k-1)$，当 $i\neq k$，

$g_{kj}=1$，

由于

$$(3k-1+e_t)(e_t+k-1)=((2k-1+e_t)+k)\cdot((2k-1+e_t)-k)=(2k-1+e_t)^2-k^2,$$

$$(3k+e_t)(3k-1+e_t)(e_t+k-1)(e_t+k-2)=[(2k-1+e_t)^2-k^2][(2k-1+e_t)^2-(k+1)^2],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(4k-3+e_t)\cdots(3k-1+e_t)(e_t+k-1)\cdots(e_t+1)=[(2k-1+e_t)^2-(2k-2)^2][(2k-1+e_t)^2-(2k-3)^2]\cdots[(2k-1+e_t)^2-k^2],$$

在行列式(7.5.5)可化简为

$$
A_{e_1,\cdots,e_k}^{s_1,\cdots,s_k}=\begin{vmatrix}
(2k-1+e_1)^{2(k-1)}, & \cdots, & (2k-1+e_k)^{2(k-1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
(2k-1+e_1)^4, & \cdots, & (2k-1+e_k)^4 \\
(2k-1+e_1)^2, & \cdots, & (2k-1+e_k)^2 \\
1, & \cdots\cdots, & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
=\prod_{0\leqslant j<l\leqslant k-1}(j^2-l^2)N((n-1-s_1)(N+1)-m_1,
$$

$$
\cdots,(N-1-s_k)(N+1)-m_k).
$$

同样，(7.5.6)可化简为

$$
\bar{A}_{e_1,\cdots,e_k}^{s_1,\cdots,s_k}=\frac{1}{\prod_{t=1}^{k}\left((n-1-s_t)(N+1)-l_t-\frac{1}{2}\right)}\cdot
$$

$$
\cdot\prod_{0\leqslant j<l\leqslant k-1}\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(k-\frac{1}{2}\right)
$$

$$
\cdot N((n-1-s_1)(N+1)-m_1,\ \cdots,(n-1-s_k)
$$

$$
\cdot(N+1)-m_k).
$$

因而有

定理 7.5.1 当 $n=2k$ 时，$B_mN(m)$ 等于

$$
\frac{((2k-1)!)^k\prod_{0\leqslant j<l\leqslant k-1}(l^2-j^2)}{(2k-1)!(2k+1)!\cdots(4k-3)!B_N(N+1)^{k(2k-1)}}
$$

$$
\cdot\sum_{\substack{s_1=0\\ l_1\geqslant 1-k}}^{4k-2}\cdots\sum_{\substack{s_k=0\\ l_k\geqslant 1-k}}^{4k-2}(-1)^{s_1+\cdots+s_k}C_{s_1}^{4k-2}\cdots C_{s_k}^{4k-2}C_{2k-1}^{3k-2+e_1}C_{2k-1}^{3k-2+e_k}
$$

$$
\cdot N((n-1-s_1)(N+1)-m_1,\cdots,(n-1-s_k)
$$

$$
\cdot(N+1)-m_k);
$$

当 $n=2k+1$ 时，$B_mN(m)$ 等于

$$
\frac{((2k)!)^k\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(k-\frac{1}{2}\right)\prod_{0\leqslant j<l\leqslant k-1}\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{(2k)!(2k+2)!\cdots(4k-2)!B_N(N+1)^{k(2k-1)}}
$$

$$\cdot \sum_{\substack{s_1=0 \\ l_1 \geq 1-k}}^{4k} \cdots \sum_{\substack{s_k=0 \\ l_k \geq 1-k}}^{4k} (-1)^{s_1+\cdots+s_k} C_{s_1}^{4k} \cdots C_{s_k}^{4k} C_{2k}^{3k-1+e_1} \cdots C_{2k}^{3k-1+e_k}$$

$$\cdot \prod_{t=1}^{k} \left((n-1-s_t)(N+1)-l_t-\frac{1}{2}\right)^{-1} N((n-1-s_1)(N+1)$$

$$-m_1, \cdots, (n-1-s_k)(N+1)-m_k),$$

这里 $e_t=(n-1)N-(N+1)s_t-l_t, (t=1,2,\cdots,k)$.

特别当 $m=(0,\cdots,0)$ 时，$B_m=1$，$N(m)=1$，故得

系 7.5.1 当 $n=2k$ 时，B_N 等于

$$\frac{((2k-1)!)^k \prod\limits_{0 \leq j < l \leq k-1} (l^2-j^2)}{(2k-1)!(2k+1)!\cdots(4k-3)!(N+1)^{k(k-1)}}$$

$$\cdot \sum_{\substack{s_1=0 \\ l_1 \geq 1-k}}^{2k-2} \cdots \sum_{\substack{s_k=0 \\ l_k \geq 1-k}}^{2k-2} (-1)^{s_1+\cdots+s_k}$$

$$\cdot C_{s_1}^{4k-2} \cdots C_{s_k}^{4k-2} C_{2k-1}^{3k-2+e_1} \cdots C_{2k-1}^{3k-2+e_k} N((n-1-s_1)$$

$$\cdot (N+1), \cdots, (n-1-s_k)(N+1));$$

当 $n=2k+1$ 时，B_N 等于

$$\frac{((2k)!)^k \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \left(k-\frac{1}{2}\right) \prod\limits_{0 \leq j < l \leq k-1} \left(\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{(2k)!(2k+2)!\cdots(4k-2)!(N+1)^{k(2k-1)}}$$

$$\cdot \sum_{\substack{s_1=0 \\ l_1 \geq 1-k}}^{2k-1} \cdots \sum_{\substack{s_k=0 \\ l_k \geq 1-k}}^{2k-1} (-1)^{s_1+\cdots+s_k} C_{s_1}^{4k} \cdots C_{s_k}^{4k} C_{2k}^{3k-1+e_1} \cdots C_{2k}^{3k-1+e_k}$$

$$\cdot \prod_{t=1}^{k} \left((n-1-s_t)(N+1)-k+t-\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\cdot N((n-1-s_1)(N+1), \cdots, (n-1-s_k)(N+1)),$$

这里 $e_t=(n-1)N-(N+1)s_t-k+t, (t=1,2,\cdots k)$.

§ 7.6 用 Cesàro 平均得到的逼近

设 Γ, W 为 $SO(n)$ 中二点 $\Gamma=(r_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $W=(w_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

于是 Γ, W 二点欧氏距离 $d(\Gamma,W)$ 的平方为

$$\sum_{i,j}^{n}|r_{ij}-w_{ij}|^2=\operatorname{tr}((\Gamma-W)(\Gamma-W)')$$
$$=\operatorname{tr}(2I-W\Gamma'-\Gamma W').$$

当 $n=2k$ 时，$W\Gamma'\sim C(\theta_1)\dotplus\cdots\dotplus C(\theta_k)$；当 $n=2k+1$ 时，$W\Gamma'\sim C(\theta_1)\dotplus\cdots\dotplus C(\theta_k)\dotplus 1$，$(d(\Gamma,W))^2$ 就是

$$2\sum_{j=1}^{k}(1-\cos\theta_j),$$

设 $u(\Gamma)$ 为 $SO(n)$ 上连续函数，则称

$$w(\Gamma,\delta)=\max_{d(\Gamma,W)<\delta}|u(\Gamma)-u(w)|$$

为 $u(\Gamma)$ 的连续模，若

$$w(\Gamma,\delta)=O(\delta^p),$$

则称 $u(\Gamma)$ 满足 Lipschtz 条件，记作

$u(\Gamma)\in\mathrm{Lip}\ p$.

可以完全仿照第四章中的方法，证明一条用 Cesàro 平均得到的逼近定理

定理 7.6.1 若 $u(\Gamma)$ 是旋转群 $SO(n)$ 上的连续函数，且 $u(\Gamma)\in\mathrm{Lip}\ p\ (0<p<1)$，则它的 Fourier 级数的 (c,α) 平均的第 N 项 $\sum_N^\alpha(\Gamma)$ 满足

(i) 若 $\alpha(n-1)-n+2>p$，则

$$|u(\Gamma)-\textstyle\sum_N^\alpha(\Gamma)|=O(N^{-p});$$

(ii) 若 $\alpha(n-1)-n+2=p$，则

$$|u(\Gamma)-\textstyle\sum_N^\alpha(\Gamma)|=O(N^{-p}\ln N);$$

(iii) 若 $\alpha(n-1)-n+2<p$，则

$$|u(\Gamma)-\textstyle\sum_N^\alpha(\Gamma)|=O(N^{-\alpha(n-1)+n-2}).$$

第八章　旋转群上的 Fourier 级数的部分和

§ 8.1　Dirichlet 核

若 $u(\Gamma)$ 是定义在 $SO(n)$ 上的可积函数，$\Gamma\in SO(n)$，它的 Fourier 级数为(6.1.12)及(6.1.14)，记 $l_1=m_1+k-1$，$\cdots$，$l_k=m_k$，则

$$s_N(\Gamma)=\sum_{N\geqslant l_1>\cdots>l_k\geqslant 0}\operatorname{tr}(A_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(\Gamma))\text{，当 } n=2k+1; \tag{8.1.1}$$

$$s_N(\Gamma)=\sum_{N\geqslant l_1>\cdots>l_k\geqslant 0}\operatorname{tr}(A_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(\Gamma))+\sum_{N\geqslant l_1>\cdots\geqslant l_k>0}\operatorname{tr}(B_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}), \tag{8.1.2}$$

当 $n=2k$；

称为 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数的部分和

以下要定出它的 Dirichlet 核来，显然

$$s_N(\Gamma_0)=\frac{1}{C}\int_{SO(n)}u(\Gamma\Gamma_0)\sum_{N\geqslant l_1>\cdots>l_k\geqslant 0}N(m)\sigma_m(\Gamma)\dot{\Gamma},$$

这里 $\sigma_m(\Gamma)$，当 $n=2k+1$ 时，由(6.1.7)给出；当 $n=2k$ 时，$\sigma_m(\Gamma)=\sigma_m^{+}(\Gamma)+\sigma_m^{-}(\Gamma)$，而 σ_m^{+} 及 σ_m^{-} 由(6.1.4)及(6.1.5)给出，但 $m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_k>0$；$\sigma_m(\Gamma)$ 由(6.1.2)给出，若 $m_1\geqslant\cdots\geqslant m_{k-1}\geqslant m_k=0$。

$$\mathscr{D}_N(\Gamma)=\sum_{N\geqslant l_1>\cdots>l_n\geqslant 0}N(m)\sigma_m(\Gamma) \tag{8.1.3}$$

就是 $SO(n)$ 的 Fourier 级数的 Dirichlet 核。要证如下的(龚昇[6])。

定理 8.1.1 若 $n=2k$，则由(8.1.3)定义的 $\mathscr{D}_N(\Gamma)$ 为

$$\mathscr{D}_N(\Gamma)=\frac{\det(d_N^{(2i-2)}(\theta_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k}}{\det(d_{k-1}^{(2i-2)}(\theta_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k}}, \tag{8.1.4}$$

若 $n=2k+1$，则

$$\mathscr{D}_N(\Gamma)=\frac{\det(e_N^{(2i-1)}(\theta_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k}}{\det(e_{k-1}^{(2i-1)}(\theta_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k}}, \tag{8.1.5}$$

这里 $d_\nu(\theta)$ 为一个变数的 Dirichlet 核 $\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\Big/\sin\frac{\theta}{2}$，

$$e_\nu(\theta)=\frac{\sin(\nu+1)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}, \tag{8.1.6}$$

(8.1.4)还可以写成

$$\mathscr{D}_N(\Gamma)=\frac{\det(d_N^{(2i-2)}(\theta_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k}}{a_{2k}C(k-1,\cdots,1,0)}; \tag{8.1.7}$$

(8.1.5)还可以写成

$$\mathscr{D}_N(\Gamma)=\frac{\det(e_N^{(2i-1)}(\theta_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k}}{a_{2k+1}s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}, \tag{8.1.8}$$

此处

$$a_{2k}=\frac{(2k-2)!\cdots4!2!}{2^{k-1}};$$

$$a_{2k+1}=\frac{(2k-1)!\cdots3!1!}{(-2i)^k},$$

而 $c(p_1,\cdots,p_k)$ 由(6.1.1)定义，$s(p_1,\cdots,p_k)$ 由(6.1.6)定义，

先来证明一个恒等式

引理 8.1.1 若 $l_1,\cdots,l_k$ 为满足 $l_1>l_2>\cdots>l_k\geqslant0$ 的整数，$p_j(l_j)$ 为只与 l_j 有关的函数 $l_j=1,\cdots,k)$，N 为正整数，a，b 为任意实数，则

$$\sum_{N>l_1>l_2>\cdots>l_k\geqslant0}\begin{vmatrix} l_1^{a-b}, & l_2^{a-b}, & \cdots, & l_k^{a-b}\\ l_1^{2a-b}, & l_2^{2a-b}, & \cdots, & l_k^{2a-b}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ l_1^{ka-b}, & l_2^{ka-b}, & \cdots, & l_k^{ka-b}\end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} p_1(l_1), & p_2(l_1), & \cdots p_k(l_1) \\ p_1(l_2), & p_2(l_2), & \cdots p_k(l_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1(l_k), & p_2(l_k), & \cdots p_k(l_k) \end{vmatrix} = \det\left(\sum_{l=0}^{N} l^{ai-b} p_j(l)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}. \tag{8.1.9}$$

证 上式左边等于

$$\frac{1}{k!}\sum_{l_1=0}^{N}\cdots\sum_{l_k=0}^{N}\det\left(\sum_{\mu=1}^{k} l_\mu^{ai-b} p_j(l_\mu)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k},$$

而 $\det\left(\sum\limits_{\mu=1}^{k} l_\mu^{ai-b} p_j(l_\mu)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ 可以拆成 k^k 个行列式，每个为

$$\begin{vmatrix} l_{i_1}^{a-b} p_1(l_{i_1}), & l_{i_1}^{a-b} p_2(l_{i_1}), & \cdots, & l_{i_1}^{a-b} p_k(l_{i_1}) \\ l_{i_2}^{2a-b} p_1(l_{i_2}), & l_{i_2}^{2a-b} p_2(l_{i_2}), & \cdots, & l_{i_2}^{2a-b} p_k(l_{i_2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{i_k}^{ka-b} p_1(l_{i_k}), & l_{i_k}^{ka-b} p_2(l_{i_k}), & \cdots, & l_{i_k}^{ka-b} p_k(l_{i_k}) \end{vmatrix}$$

的形式，显然除了 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 为 $(1, 2, \cdots, k)$ 的一个排列外，其余全为零，所以

$$\frac{1}{k!}\sum_{l_1=0}^{N}\cdots\sum_{l_k=0}^{N}\det\left(\sum_{\mu=1}^{k} l_\mu^{ai-b} p_j(l_\mu)\right)$$

等于 $\sum\limits_{l_1=0}^{N}\cdots\sum\limits_{l_k=0}^{N}\det\left(l_i^{ai-b} p_j(l_i)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}$，而这就是

$$\det\left(\sum_{l=0}^{N} l^{ai-b} p_j(l)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}.$$

§ 8.2 Dirichlet 核的证明

现在来证明定理 8.1.1.

先来考虑 $n = 2k + 1$ 的情形.

以 $m = (m_1, \cdots, m_k)$ 为标记的不可约表示的特征 $\sigma_m(\Gamma)$ 为 (Murnaghan[1])

$$[m]=\frac{s\left(l+\frac{1}{2}\right)}{s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)},$$

这里 $l=(l_1,\cdots,l_k)$，$l_1=m_1+k-1,\cdots,l_{k-1}=m_{k-1}+1$，$l_k=m_k$，而 $s\left(l+\frac{1}{2}\right)$ 由(6.1.6)所定义，其维数为

$$N(m)=\lim_{\substack{\theta_1\to 0\\ \cdots\\ \theta_k\to 0}}[m],$$

此为

$$l_1'\cdots l_k'\begin{vmatrix}1, & l_1'^2, & \cdots, & l_1'^{2k-2}\\ 1, & l_2'^2, & \cdots, & l_2'^{2k-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1, & l_k'^2, & \cdots, & l_k'^{2k-2}\end{vmatrix}\Big/\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot D$$

这里

$$D=\begin{vmatrix}1, & \left(k-\frac{1}{2}\right)^2, & \cdots, & \left(k-\frac{1}{2}\right)^{2k-2}\\ 1, & \left(k-\frac{3}{2}\right)^2, & \cdots, & \left(k-\frac{3}{2}\right)^{2k-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1, & \left(\frac{1}{2}\right)^2, & \cdots, & \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2}\end{vmatrix},$$

$l_j'=l_j+\frac{1}{2}$.

于是 Dirichlet 核

$$\mathscr{D}_N(\Gamma)=\sum_{N\geqslant l_1>\cdots>l_k\geqslant 0}N(m)[m]=\frac{P}{Q},$$

而 P 等于

$$\sum_{N>l_1>\cdots>l_k\geqslant 0}\begin{vmatrix} l'_1, & l'^3_1, & \cdots, & l'^{2k-1}_1 \\ l'_2, & l'^3_2, & \cdots, & l'^{2k-1}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l'_k, & l'^3_k, & \cdots, & l'^{2k-1}_k \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \sin l'_1\theta_1, & \cdots, & \sin l'_1\theta_k \\ \sin l'_2\theta_1, & \cdots, & \sin l'_2\theta_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin l'_k\theta_1, & \cdots, & \sin l'_k\theta_k \end{vmatrix};$$

Q 等于

$$\begin{vmatrix} \left(k-\frac{1}{2}\right), & \left(k-\frac{1}{2}\right)^3, & \cdots, & \left(k-\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ \left(k-\frac{3}{2}\right), & \left(k-\frac{3}{2}\right)^3, & \cdots, & \left(k-\frac{3}{2}\right)^{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2}, & \left(\frac{1}{2}\right)^3, & \cdots, & \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta_1, & \cdots, & \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta_k \\ \sin\left(k-\frac{3}{2}\right)\theta_1, & \cdots, & \sin\left(k-\frac{3}{2}\right)\theta_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\frac{1}{2}\theta_1, & \cdots, & \sin\frac{1}{2}\theta_k \end{vmatrix};$$

对 P 应用引理 8.1.1，取 $a=2$，$b=1$，$p_j(l)=\sin l\theta_j$ 就得到

$$P=\det\left(\sum_{l=0}^{N} l'^{2i-1}\sin l'\theta_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}.$$

显然

$$\sum_{l=0}^{N} l'^{2i-1}\sin l'\theta=(-1)^i\frac{d^{2i-1}}{d\theta^{2i-1}}\left(\frac{\sin(N+1)\theta}{2\sin\theta/2}\right).$$

因此

$$P=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\det\left(\left(\frac{\sin(N+1)\theta_j}{2\sin\frac{\theta_j}{2}}\right)^{(2i-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}.$$

同样可得

$$Q=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\det\left(\left(\frac{\sin k\theta_i}{2\sin\frac{\theta_i}{2}}\right)^{(2j-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k},$$

于是证明了 $n=2k+1$ 的情形.

再来考虑 $n=2k$ 的情形.

当 $l_k=0$ 时，以 $m=(m_1,\cdots,m_{k-1},0)$ 为标签的不可约表示的特征 $\sigma_m(\Gamma)$ 为 (Murnaghan[1])

$$[m]=\frac{c(l_1,\cdots,l_k)}{c(k-1,\cdots,1,0)},$$

这里 $l=(l_1,\cdots,l_k)$, $l_1=m_1+k-1,\cdots,l_{k-1}=m_{k-1}+1$, $l_k=m_k$, 而 $c(l)$ 由(6.1.1)所定义，表示的维数为

$$N(m)=\lim_{\substack{\theta_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ \theta_k\to 0}}[m],$$

此为

$$\begin{vmatrix}1, & l_1^2, & \cdots, & l_1^{2k-2}\\ 1, & l_2^2, & \cdots, & l_2^{2k-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1, & l_k^2, & \cdots, & l_k^{2k-2}\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}1, & (k-1)^2, & \cdots, & (k-1)^{2k-2}\\ 1, & (k-2)^2, & \cdots, & (k-2)^{2k-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1, & 1, & \cdots, & 1\\ 1, & 0, & \cdots, & 0\end{vmatrix}. \quad (8.2.1)$$

当 $l_k>0$ 时，以 $m=(m_1,\cdots,m_k)$ 为标签的不可约表示的特征为 $\sigma_m^{+}(\Gamma)$ 及 $\sigma_m^{-}(\Gamma)$，它们分别为 (Murnaghan[1])

$$[m]_+=\frac{\frac{1}{2}\{c(l)+s(l)\}}{c(k-1,\cdots,1,0)}$$

及

$$[m]_-=\frac{\frac{1}{2}\{c(l)-s(l)\}}{c(k-1,\cdots,1,0)},$$

它们的维数均为 $N(m)$，由(8.2.1)所定义。

于是 Dirichlet 核

$$\mathscr{D}_N(\Gamma) = \sum_{N>l_1>\cdots>l_k\geq 0} N(m)[m] = \frac{P_1}{Q_1},$$

而 P_1 等于

$$\sum_{N>l_1>\cdots>l_k\geq 0} \begin{vmatrix} 1, & l_1^2, & \cdots, & l_1^{2k-2} \\ 1, & l_2^2, & \cdots, & l_2^{2k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & l_k^2, & \cdots, & l_k^{2k-2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{l_1}(\theta_1), & \cdots, & c_{l_1}(\theta_k) \\ c_{l_2}(\theta_1), & \cdots, & c_{l_2}(\theta_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{l_k}(\theta_1), & \cdots, & c_{l_k}(\theta_k) \end{vmatrix}$$

及 Q_1 等于

$$\begin{vmatrix} 1, & (k-1)^2, & \cdots, & (k-1)^{2k-2} \\ 1, & (k-2)^2, & \cdots, & (k-2)^{2k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ 1, & 0, & \cdots, & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{k-1}(\theta_1), & \cdots, & c_{k-1}(\theta_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1(\theta_1), & \cdots, & c_1(\theta_k) \\ c_0(\theta_1), & \cdots, & c_0(\theta_k) \end{vmatrix},$$

对 P_1，应用引理 8.1.1，取 $a=2, b=2, p_i(l)=c_l(\theta_i)$，就得到

$$P_1 = \det\left(\sum_{l=0}^{N} l^{2s-2} c_l(\theta_t)\right)_{1\leqslant s,t\leqslant k}.$$

显然，当 $s>1$ 时，

$$\sum_{l=0}^{N} l^{2s-2} c_l(\theta) = 2\sum_{l=0}^{N} l^{2s-2}\cos l\theta = (-1)^{s-1}$$

$$\cdot\left(\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^{(2s-2)};$$

当 $s=1$ 时，

$$\sum_{l=0}^{N} l^{2s-2} c_l(\theta) = \sum_{l=0}^{N} c_l(\theta) = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = d_N(\theta).$$

因此，

$$P_1=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\det\left(\left(\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta_j}{\sin\frac{\theta_j}{2}}\right)^{(2i-2)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k};$$

同样可得

$$Q=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\cdot\det\left(\left(\frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta_j}{\sin\frac{\theta_j}{2}}\right)^{(2i-2)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}.$$

于是证明了当 $n=2k$ 的情形.

§ 8.3 Fourier 级数的部分和

如前所述,若 $u(\Gamma)$ 为 $SO(n)$ ($\Gamma\in SO(n)$) 上可积函数,它的 Fourier 级数 (6.1.12) 及 (6.1.14) 的部分和 (8.1.1)及 (8.1.2) 可表为

$$s_N(\Gamma_0)=\frac{1}{C}\int_{SO(n)}u(\Gamma\Gamma_0)\mathscr{D}_N(\Gamma)\dot{\Gamma},\tag{8.3.1}$$

这里 $\mathscr{D}_N(\Gamma)$ 为 Dirichlet 核,当 n 为奇、偶数时,分别由(8.1.5)及(8.1.4)所表示,有了 Dirichlet 核,就不难得到 Fourier 级数的收敛判别法. 容易证明

引理 8.3.1 若 $\mathscr{D}_N(\Gamma)$ 为 $SO(n)$ 上的 Fourier 级数的 Dirichlet 核,则

$$\frac{1}{C}\int_{SO(n)}\mathscr{D}_N(\Gamma)\dot{\Gamma}=1.\tag{8.3.2}$$

这可由不可约表示的正交性立刻得出. 这里给一个不依赖于群表示的证明.

证 先考虑 $n=2k+1$ 的情形,由(8.1.8)及(6.1.20),得到

$$\frac{1}{C}\int_{SO(n)}\mathscr{D}_N(\Gamma)\dot{\Gamma}=\frac{(+i)^k}{(2k-1)!\cdots3!\,1!\,\pi^k}$$

$$\int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1>\cdots>\theta_k\geqslant0}\det(e_N^{(2i-1)}(\theta_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k}$$

$$\cdot s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)d\theta_1\cdots d\theta_k.$$

显然上式右边等于

$$\frac{(+i)^k}{(2k-1)!\cdots 3!1!\pi^k}\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$\cdot e_N'(\theta_1)e_N''(\theta_2)\cdots e_N^{(2k-1)}(\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k.$$

而这又等于

$$\frac{(+i)^k}{(2k-1)!\cdots 3!1!\pi^k}\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$\cdot\left\{e_{k-1}'(\theta_1)-2\left(k+\frac{1}{2}\right)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta_1,\cdots\right.$$
$$\left.\cdot\ 2\left(N+\frac{1}{2}\right)\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}\cdots\left\{e_{k-1}^{(2k-1)}(\theta_k)+(-1)^k\right.$$
$$\cdot\left(2\left(k+\frac{1}{2}\right)^{2k-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta_k+\cdots+2\right.$$
$$\left.\left.\cdot\left(N+\frac{1}{2}\right)^{2k-1}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right)\right\}d\theta_1\cdots d\theta_k$$
$$=\frac{(-i)^k}{(2k-1)!3!1!\pi^k}\int\cdots\int_{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_k>0}s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$\cdot\det\left(e_{k-1}^{(2i-1)}(\theta_j)\right)_{1\le i,j\le k}d\theta_1\cdots d\theta_k=1.$$

当 $n=2k$ 时，也可以同样考虑．要注意的是，由于此时

$$\frac{1}{C}\int_{SO(n)}\mathscr{D}_N(\Gamma)\dot{\Gamma}=\frac{2}{C}\int_G\mathscr{D}_N(\Gamma)\dot{\Gamma},$$

然后对 G 再进行分解，进行讨论．

任一 $\Gamma\in SO(n)$，可表为

$$\Gamma=K(c_1\dotplus c_2\dotplus\cdots)K',\quad K\in SO(n),$$

取 $K_1\in SO(n)$，使

$$K_1(c_1\dotplus c_2\dotplus\cdots)K_1'=c_{r_1}\dotplus c_{r_2}\dotplus\cdots,$$

其中 $(r_1,r_2,\cdots,r_k)$ 为 $(1,2,\cdots,k)$ 的一个排列．令

$$\Gamma^*=KK_1(c_1\dotplus c_2\dotplus\cdots)K_1'K'=H\Gamma H',$$

此处 $H=KK_1K'\in SO(n)$. 作

$$u^*(\Gamma\Gamma_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{k!}\sum\limits_{(r_1,\cdots,r_k)}u(\Gamma^*\Gamma_0), & \text{当 } n=2k+1 \text{ 时;}\\ \dfrac{1}{2k!}\sum\limits_{(r_1,\cdots,r_k)}(u(K_1\Gamma^*K_1'\Gamma_0)+u(P^*P_0)), & \text{当 } n=2k \text{ 时,}\end{cases}$$

而 $\Gamma\in G$, K_1 为行列式等于 -1 的某一固定正交方阵.

由紧致群积分不变性

$$s_N(\Gamma_0)=\frac{1}{C}\int_{SO(n)}u^*(\Gamma\Gamma_0)\mathscr{D}_N(\Gamma)\dot{\Gamma},$$

由(8.3.2)得

$$s_N(\Gamma_0)-u(\Gamma_0)=\frac{1}{C}\int_{SO(n)}(u^*(\Gamma\Gamma_0)-u(\Gamma_0))\mathscr{D}_N(\Gamma)\dot{\Gamma}. \tag{8.3.3}$$

记

$$g_{\Gamma_0}(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\frac{1}{V(\Sigma)}\int_\Sigma(u^*(\Gamma\Gamma_0)-u(\Gamma_0))\dot{\Sigma}.$$

由 u^* 的定义，这显然是 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的对称函数，易知，(8.3.3) 可表为

$$s_N(\Gamma_0)-u(\Gamma_0)=c_0\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi g_{\Gamma_0}(\theta_1,\cdots,\theta_k)d\tau. \tag{8.3.4}$$

此处

$$c_0=\begin{cases}\dfrac{(+i)^k}{(2k-1)!\cdots3!\,1!\,\pi^k}, & \text{当 } n=2k+1;\\ \dfrac{1}{(2k-2)!\cdots4!\,2!\,\pi^k}, & \text{当 } n=2k,\end{cases}$$

$$d\tau=\begin{cases}s\left(k-\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)c_N'(\theta_1)\cdots c_N^{(2k-1)}(\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k,\\ \quad\text{当 } n=2k+1;\\ c(k-1,\cdots,1,0)d_N(\theta_1)\cdots d_N^{(2k-2)}(\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k,\\ \quad\text{当 } n=2k.\end{cases}$$

考虑积分

$$c_0\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} g_{\Gamma_0}(\theta_1,\cdots,\theta_k)d\tau,$$

作变换 $\theta_1\to 2\pi-\theta_1$，上式成为

$$c_0\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} g_{\Gamma_0}(-\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)d\tau=\frac{1}{C}$$

$$\cdot\int_{SO(n)}\{u^*(K(c_1(-\theta_1)\dot{+}c_2\dot{+}\cdots)K'\Gamma_0)-u(\Gamma_0)\}\mathscr{D}_N(\Gamma)\dot{\Gamma}.$$

取

$$K_1=\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & & & & & 0\\ & -1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & -1\end{pmatrix}, & 当\ n=2k+1;\\[2ex] \begin{pmatrix}1 & & & & 0\\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1\end{pmatrix} & 当\ n=2k.\end{cases}$$

则

$$K(c_1(-\theta_1)\dot{+}c_2\dot{+}\cdots)K'=KK_1(c_1\dot{+}c_2\dot{+}\cdots)K_1'K'$$
$$=KK_1K'\Gamma KK_1'K'.$$

由积分不变性，(8.3.4)的右边即为

$$\frac{c_0}{2^k}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} g_{\Gamma_0}(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)d\tau. \tag{8.3.5}$$

§8.4 Fourier 级数的收敛定理

先考虑 $n=2k+1$ 的情形.

若 $u(\Gamma)\in C^{k^2+p}\ (0<p<1)$，分部积分(8.3.5)，由于 $g_{\Gamma_0}(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 为周期函数，就得到

$$s_N(\Gamma_0)-u(\Gamma_0)=\frac{(-i)^k}{(2k-1)!\cdots 3!\,1!}$$

$$\cdot\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\cdots\frac{\partial^{2k-1}}{\partial\theta_k^{2k-1}}\Big[g_{\Gamma_0}(\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

$$\cdot s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\Big] e_N(\theta_1)\cdots e_N(\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k. \quad (8.4.1)$$

以 $I_{\nu_1,\cdots,\nu_k}$ 记积分

$$\frac{(-i)^k}{(2k-1)!\cdots 3!1!}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^{\mu_1}}{\partial\theta_1^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial^{\mu_k}}{\partial\theta_k^{\mu_k}}gr_0(\theta_1,\cdots,\theta_k)\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial\theta_1^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial^{\nu_k}}{\partial\theta_k^{\nu_k}}s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\cdot e_N(\theta_1)\cdots e_N(\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k,$$

此处 μ_l, ν_l 为非负整数，且 $\mu_l+\nu_l=2l-1$, $l=1,\cdots,k$ 于是

$$s_N(\Gamma_0)-u(\Gamma_0)=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k} I_{\nu_1,\cdots,\nu_k}. \quad (8.4.2)$$

首先考虑 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_k$ 中至少有一个 ν_i 为偶数的情形，此时 $\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial\theta_1^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial^{\nu_k}}{\partial\theta_k^{\nu_k}}s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ 中至少有因子 $\sin\frac{\theta_i}{2}$，如果 $f(\theta)\in \mathrm{Lip}\,p$, $(0<p<1)$ 时，

$$\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin N\theta d\theta=O\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

而

$$\int_0^{2\pi}|e_N(\theta)|d\theta\leqslant 2\int_0^{2\pi}|d_{2N}(\theta)|d\theta+2\int_0^{2\pi}|d_N(\theta)|d\theta$$

$$=O(\ln N),$$

因此，由 $u(\Gamma)\in C^{k^2}$ 推出

$$I_{\nu_1,\cdots,\nu_k}=O\left(\frac{\ln^{k-1}N}{N^p}\right).$$

当 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_k$ 均为奇数，且 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k=0$ 时，

$$I_{1,3,\cdots,2k-1}=\frac{(-i)^k}{(2k-1)!\cdots 3!1!\pi^k}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}gr_0(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$$

$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\cdots\frac{\partial^{2k-1}}{\partial\theta_k^{2k-1}}s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\cdot e_N(\theta_1)\cdots e_N(\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k.$$

将积分区域分解为

R_1: $\delta \geqslant \theta_1, \cdots, \theta_k \geqslant 0$;

R_2: $\pi \geqslant \theta_{i_1} \geqslant \delta \geqslant \theta_1, \cdots, \hat{\theta}_{i_1}, \cdots, \theta_k \geqslant 0, i_1 = 1, 2, \cdots, k$;

R_3: $\pi \geqslant \theta_{i_1}, \theta_{i_2} \geqslant \delta \geqslant \theta_1, \cdots, \hat{\theta}_{i_1}, \cdots, \hat{\theta}_{i_2}, \cdots, \theta_k \geqslant 0$, $i_1, i_2 = 1, 2, \cdots, k$;

且 $i_1 \neq i_2$,

……………………

R_{k+1}: $\pi \geqslant \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k \geqslant \delta$.

记 I_i 为

$$\frac{(-i)^k}{(2k-1)!\cdots 3!1!\pi^k}\int_{R_i} g_{T_0}(\theta_1, \cdots, \theta_k) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\cdots\frac{\partial^{2k-1}}{\partial\theta_k^{2k-1}} s\left(k-\frac{1}{2}, \cdots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \cdot e_N(\theta_1)\cdots e_N(\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k.$$

先考虑 I_1, 由于 $\delta \geqslant \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k \geqslant 0$, 故

$$|g_{T_0}(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)| = O(\delta).$$

于是

$$I_1 = O(\delta \ln^k N).$$

再考虑 I_2, 由于, $f(\theta)$ 是连续可微, 则

$$\int_\delta^\pi f(\theta)e_N(\theta)d\theta = \int_\delta^\pi f(\theta)d_N(\theta)d\theta + \int_\delta^\pi f(\theta)\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta d\theta$$

$$= O\left(\frac{1}{\delta}\omega\left(\frac{1}{N}\right)\right) + O\left(\frac{1}{N}\right) = O\left(\frac{1}{\delta N}\right).$$

这里 $\omega(x)$ 为函数 f 的连续模, 于是

$$I_2 = O\left(\frac{\ln^{k-1}N}{\delta N}\right).$$

同样可得

$$I_3 = O\left(\frac{\ln^{k-2}N}{\delta^2 N}\right), \cdots, I_{k+1} = O\left(\frac{1}{\delta^k N}\right).$$

取 $\delta = (N\ln^k N)^{\frac{-1}{k+1}}$, 则

$$I_{1,3,\cdots,2k-1}=O\left(\left(\frac{\ln^{k^2}N}{N}\right)^{\frac{1}{k+1}}\right).$$

取 $\delta=(N\ln^k N)^{\frac{1}{k+1}}$，则

$$I_{1,3,\cdots,2k-1}=O\left(\left(\frac{\ln^{k^2}N}{N}\right)^{\frac{1}{k+1}}\right).$$

如果 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_k$ 全为奇数，且至少有二个是相同的，例如，$\nu_i=\nu_j$，此时

$$\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial\theta_1^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial^{\nu_k}}{\partial\theta_k^{\nu_k}}s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

必有因子 $\cos\frac{\theta_i}{2}-\cos\frac{\theta_j}{2}$。由此可得

$$\begin{aligned}I_{\nu_1,\cdots,\nu_k}=&\frac{(-i)^k}{(2k-1)!\cdots3!1!\pi^k}\\&\cdot\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\left(\frac{\partial^{\mu_1}}{\partial\theta_1^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial^{\mu_k}}{\partial\theta_k^{\mu_k}}gr_0(\theta_1,\cdots,\theta_k)\right)\\&\cdot\left(\left(1-\cos\frac{\theta_i}{2}\right)-\left(1-\cos\frac{\theta_j}{2}\right)\right)\varphi(\theta_1,\cdots,\theta_k)\\&\cdot e_N(\theta_1)\cdots e_N(\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k,\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial\theta_1^{\nu_1}}\frac{\partial^{\nu_2}}{\partial\theta_2^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial^{\nu_k}}{\partial\theta_k^{\nu_k}}s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\\&\qquad=\left(\cos\frac{\theta_i}{2}-\cos\frac{\theta_j}{2}\right)\varphi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k),\end{aligned}$$

而 φ 是可微函数。

总结起来得到

$$\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k}I_{\nu_1,\cdots,\nu_k}=O\left(\left(\frac{\ln^{k^2}N}{N}\right)^{\frac{1}{k+1}}\right).$$

再考虑 $n=2k$ 的情形。(8.3.5)就是

$$\frac{1}{(2k-2)!\cdots4!2!}\frac{1}{(2\pi)^k}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}gr_0(\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

$$\cdot c(k-1,\cdots,1,0)d_N(\theta_1)d_N''(\theta_2)\cdots d_N^{(2k-2)}(\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k,$$

若 $u(\Gamma)\in C^{k(k-1)+p}(0<p<1)$，如同处理奇数时的情形一样，分部积分，用 $I_{\nu_1,\cdots,\nu_k}$ 记积分

$$\frac{1}{(2k-2)!\cdots4!2!}\frac{1}{(2\pi)^k}$$

$$\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^{\mu_1}}{\partial\theta_1^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial^{\mu_k}}{\partial\theta_k^{\mu_k}}\cdot g_{\Gamma_0}(\theta_1,\cdots,\theta_k)\right)\left(\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial\theta_1^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial^{\nu_k}}{\partial\theta_k^{\nu_k}}\right.$$

$$\left.\cdot c(k-1,\cdots,1,0)d\theta_1\cdots d\theta_k\right).$$

当 $\nu_1,\cdots,\nu_k$ 至少有一奇数时，

$$I_{\nu_1,\cdots,\nu_k}=O\left(\frac{\ln^{k-1}N}{N}\right);$$

当 $\nu_1,\cdots,\nu_k$ 均为偶数，且 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k=0$ 时，

$$I_{0,2,\cdots,2k-2}=O\left(\left(\frac{\ln^{k^2}N}{N}\right)^{\frac{1}{k+1}}\right).$$

否则，$\nu_1,\cdots,\nu_k$ 至少有两个相同，例如 $\nu_i=\nu_j$，于是

$$\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial\theta_1^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial^{\nu_k}}{\partial\theta_k^{\nu_k}}c(k-1,\cdots,1,0)$$

必含有因子 $\cos\theta_i\cdots\cos\theta_j$. 因而

$$I_{\nu_1,\cdots,\nu_k}=O\left(\frac{\ln^{k-1}N}{N^p}\right).$$

综合以上所述，我们有(王世坤、董道珍[1])

定理 8.4.1 若 $u(\Gamma)$ 是在 $SO(n)$ 上定义的函数，$\Gamma\in SO(n)$，当 $n=2k+1$ 时，$u(\Gamma)\in C^{k^2+p}$，当 $n=2k$ 时，$u(\Gamma)\in C^{k(k-1)+p}$ $(p>0)$；则 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数 (6.1.12) 及 (6.1.14) 收敛，若 $s_N(\Gamma)$ 为由(8.1.1)及(8.1.2)所定义的部分和，则

$$|s_N(\Gamma)-u(\Gamma)|\leqslant A\max\left(\left(\frac{\ln^{k^2}N}{N}\right)^{\frac{1}{k+1}},\frac{\ln^{k-1}N}{N^p}\right),$$

这里 A 为绝对常数.

§ 8.5 Fourier 级数的绝对收敛

若 $u(\Gamma)$ 是 $SO(n)$ 上可积函数，其 Fourier 级数为(6.1.12)及

(6.1.14)。若当 $n=2k+1$ 时，级数

$$\sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_n\geqslant 0}\sum_{i,j}^{N(m)}|a_{ij}^m|\cdot|\varphi_{ij}^m(\Gamma)|$$

收敛；而当 $n=2k$ 时，级数

$$\sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_n\geqslant 0}\sum_{i,j}^{N(m)}|a_{ij}^m|\cdot|\varphi_{ij}^m(\Gamma)|+\sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_n>0}|b_{ij}^m||\varphi_{ij}^m(\Gamma)|$$

收敛；则称 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数绝对收敛。

下面按奇偶情形分别讨论。

1. 当 $n=2k+1$ 时，则

$$A_mA_m'=\frac{N^2(m)}{C^2}\int_{SO(n)}\int_{SO(n)}u(\Gamma)u(K)\Phi_m(\Gamma)\Phi_m(K')\dot{\Gamma}\dot{K},$$

所以

$$\mathrm{tr}(A_mA_m')=\frac{N^2(m)}{C^2}\int_{SO(n)}\int_{SO(n)}u(\Gamma K)u(K)\sigma_m(\Gamma)\dot{K}\dot{\Gamma}.$$

记

$$g(\Gamma)=\int_{SO(n)}u(\Gamma K)u(K)\dot{K},$$

$$h(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\frac{1}{\nu(\Sigma)}\int_\Sigma g(\Gamma)\dot{\Sigma},$$

$$h^*(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\frac{1}{k!}\sum_{(r_1,\cdots,r_k)}h(\theta_{r_1},\cdots,\theta_{r_k}).$$

求和指标为 $(1,2,\cdots,k)$ 的所有排列，由积分不变性，$\mathrm{tr}(A_mA_m')$ 可以写成

$$\frac{(-1)^kN^2(m)}{C}\cdot\frac{1}{(2\pi)^k}\int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1>\cdots>\theta_k\geqslant 0}h^*(\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

$$\cdot\sigma_m(\Gamma)s^2\left(k-\frac{1}{2},\cdots\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)d\theta_1\cdots d\theta_k. \quad (8.5.1)$$

将 $\sigma_m(\Gamma)$ 的值代入(8.5.1)，就得到，$\mathrm{tr}(A_mA_m')$ 等于

$$\frac{(-i)^kN^2(m)}{C}\frac{1}{(2\pi)^k}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}H(\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

$$\cdot \sin\left(l_1+\frac{1}{2}\right)\theta_1\cdots\sin\left(l_k+\frac{1}{2}\right)\theta_k d\theta_1\cdots d\theta_k, \quad (8.5.2)$$

这里

$$H(\theta_1,\cdots,\theta_k)=h^*(\theta_1,\cdots,\theta_k)s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right). \quad (8.5.3)$$

考虑积分

$$I=\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\theta_k}D\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2},\cdots,\frac{\partial^2}{\partial\theta_k^2}\right)\right.$$
$$\left.\cdot H(\theta_1,\cdots,\theta_k)\right]\sin\left(l_1+\frac{1}{2}\right)\theta_1\cdots$$
$$\cdots\sin\left(l_k+\frac{1}{2}\right)\theta_k d\theta_1\cdots d\theta_k. \quad (8.5.4)$$

显然

$$\left(\frac{\partial^{\mu_1}}{\partial\theta_1^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial^{\mu_k}}{\partial\theta_k^{\mu_k}}H(\theta_1,\cdots,\theta_k)\right)$$
$$\cdot\left(\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial\theta_1^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial^{\nu_k}}{\partial\theta_k^{\nu_k}}\sin\left(l_1+\frac{1}{2}\right)\theta_1\cdots\sin\left(l_k+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right)$$

含有因子 $\sin\frac{\theta_i}{2}$ 或 $\sin\left(l_i+\frac{1}{2}\right)\theta_i$，否则必有因子

$$\cos\frac{\theta_i}{2}\cos\left(l_i+\frac{1}{2}\right)\theta_i=\frac{1}{2}(\cos l_i\theta_i+\cos(l_i+1)\theta_i).$$

分部积分(8.5.4)，可得

$$I=(-1)^{k^2}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}H(\theta_1,\cdots,\theta_k)$$
$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\theta_k}\cdot D\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2},\cdots,\frac{\partial^2}{\partial\theta_k^2}\right)\sin\left(l_1+\frac{1}{2}\right)\theta_1\cdots\right.$$
$$\left.\cdot\sin\left(l_k+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right\}d\theta_1\cdots d\theta_k. \quad (8.5.5)$$

所以

$$\operatorname{tr}(A_mA_m')=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{2^kN(m)}{c(2n-1)!\cdots3!1!}\left(\frac{-i}{2\pi}\right)^k$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta_1} \cdots \frac{\partial}{\partial\vartheta_k} D\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2}{\partial\vartheta_k^2}\right)\right.$$

$$\left. \cdot H(\theta_1, \cdots, \theta_k)\right\} \cos\left(l_1 + \frac{1}{2}\right)\theta_1 \cdots \cos\left(l_k + \frac{1}{2}\right)\theta_k$$

$$\cdot d\theta_1 \cdots d\theta_k. \tag{8.5.6}$$

同样可得

$$\operatorname{tr}(A_m A_m')N^3(m) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{2^k}{(2k-1)!\cdots 3!1!}\right)^5 \left(\frac{-i}{2\pi}\right)^k$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left\{\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta_1} \cdots \frac{\partial}{\partial\theta_k} D\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2}{\partial\theta_k^2}\right)\right]^5 \cdot\right.$$

$$\left. H(\theta_1, \cdots, \theta_k)\right\} \cos\left(l_1 + \frac{1}{2}\right)\theta_1 \cdots \cos\left(l_k + \frac{1}{2}\right)\theta_k d\theta_1 \cdots d\theta_k$$

$$= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{1}{C} \left(\frac{2^k}{(2k-1)!\cdots 3!1!}\right)^5 \left(\frac{-i}{2}\right)^k \left\{ c_{-l_1, -l_2, \cdots, -l_k}\right.$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant k} c_{-l_1, \cdots, l_{i_1}+1, \cdots, -l_k} + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant k} c_{-l_1, \cdots, l_{i_1}+1, \cdots, l_{i_2}+1, \cdots, -l_k}$$

$$\left. + \cdots + c_{l_1+1, \cdots, l_k+1}\right\}, \tag{8.5.7}$$

其中 $c_{\alpha_1, \cdots, \alpha_k}$ 为

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1} \cdots \frac{\partial}{\partial\theta_k} D\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2}{\partial\theta_k^2}\right)\right)^5 H(\theta_1, \cdots, \theta_k)\right\} e^{\frac{1}{2}i(\theta_1 + \cdots + \theta_k)}$$

的多重 Fourier 级数的系数，于是

$$\left|\sum_{N \geqslant l_1 > \cdots > l_k \geqslant 0} N^3(m) \operatorname{tr}(A_m A_m')\right| \leqslant B_1 \cdot \sum_{N+1 \geqslant l_1 > \cdots > l_k \geqslant -(N+1)} |c_{l_1, \cdots, l_k}|. \tag{8.5.8}$$

其中 B_1 为绝对常数。

2. 当 $n = 2k$ 时，如同奇数时一样，可得

$$\operatorname{tr}(B_m B_m') = \frac{2N^2(m)}{C} \frac{1}{(2\pi)^k} \int \cdots \int_{\pi \geqslant \theta_1 > \cdots > \theta_k \geqslant 0} h^*(\theta_1, \cdots, \theta_k)$$

$$\cdot \sigma_m^\psi(\Gamma) c^2(k-1, \cdots, 1, 0) d\theta_1 \cdots d\theta_k. \tag{8.5.9}$$

把 $\sigma_m^{\psi}(\Gamma)$ 代入(8.5.9)，可得

$$\operatorname{tr}(B_m B_m') = \frac{N^3(m)}{C}\frac{1}{(2\pi)^k}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} H(\theta_1,\cdots,\theta_k)$$
$$\cdot(\cos l_1\theta_1\cdots\cos l_k\theta_k - i^k\sin l_1\theta_1\cdots\sin l_k\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k,$$

此处

$$H(\theta_1,\cdots,\theta_k) = h^*(\theta_1,\cdots,\theta_k)c(k-1,\cdots,1,0). \quad (8.5.10)$$

同样可得

$$N^3(m)\operatorname{tr}(B_m B_m') = \frac{1}{C}\cdot\left(\frac{2^{k-1}}{(2k-2)!\cdots4!2!}\right)^5\frac{1}{(2\pi)^k}$$
$$\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left(D\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2},\cdots,\frac{\partial^2}{\partial\theta_k^2}\right)\right)^5 H(\theta_1,\cdots,\theta_k)\right\}$$
$$\cdot(\cos l_1\theta_1\cdots\cos l_k\theta_k - i^k\sin l_1\theta_1\cdots\sin l_k\theta_k)d\theta_1\cdots d\theta_k$$
$$= \frac{1}{C}\left(\frac{2^{k-1}}{(2k-2)!\cdots4!2!}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\sum_{1\leqslant i_1\leqslant k} c_{-l_1,\cdots,l_{i_1},\cdots,-l_k}\right.$$
$$\left.+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k} c_{-l_1,\cdots,l_{i_1},\cdots,l_{i_2},\cdots,-l_k}+\cdots\right),$$

其中 $c_{\sigma_1,\cdots,\sigma_k}$ 为 $\left(D\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2},\cdots,\frac{\partial^2}{\partial\theta_k^2}\right)\right)^5 H(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 的多重 Fourier 级数的系数. 当 k 为偶数时，上式终止于

$$c_{-l_1,l_2,\cdots,l_k} + c_{l_1,-l_2,\cdots,l_k} + \cdots + c_{l_1,\cdots,l_{k-1},-l_k},$$

而当 k 为奇数时，它终止于 $c_{l_1,\cdots,l_k}$. 因而同样可得

$$\left|\sum_{N>l_1>\cdots>l_k>0} N^3(m)\operatorname{tr}(B_m B_m')\right| \leqslant B_2 \sum_{N>l_1>\cdots>l_k>-N} |c_{l_1,\cdots,l_k}|. \quad (8.5.11)$$

此处 B_2 为绝对常数，同样可以有 $\operatorname{tr}(A_m A_m')$ 的项。

设 $f(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 为在 $0\leqslant\theta_1,\cdots,\theta_k\leqslant 2\pi$ 中定义的连续函数，定义连续模、积分模及 Lipschitz 条件(如第三章 §3.6). 于是有(王世坤、董道珍[1])

定理 8.5.1 若 $u(\Gamma)$ 是 $SO(n)$ 上可积函数，$\Gamma\in SO(n)$，当 $n=2k+1$ 时，$u(\Gamma)\in c^{5k^2}$，且

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\theta_k}D\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2},\cdots,\frac{\partial^2}{\partial\theta_k^2}\right)\right)^5$$

$$\cdot H(\theta_1,\cdots,\theta_k)\in \mathrm{Lip}(2,\alpha),\quad \alpha>\frac{1}{2},\qquad (8.5.12)$$

这里H由(8.5.3)所定义，当 $n=2k$ 时，$u(\Gamma)\in c^{5k(k-1)}$，且

$$\left(D\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2},\cdots,\frac{\partial^2}{\partial\theta_k^2}\right)\right)^5_4 H(\theta_1,\cdots,\theta_k)\in \mathrm{Lip}(2,\alpha),\ \alpha>\frac{1}{2},$$

$$(8.5.13)$$

这里 H 由(8.5.10)所定义；则 Fourier 级数(6.1.14)及(6.1.12)绝对收敛。

证 当 $n=2k+1$ 时，由 Schwartz 不等式

$$\sum_{i,j}^{N(m)}|a_{ij}^m|\cdot|\varphi_{ij}^m(\Gamma)|\leqslant N^{\frac{1}{2}}(m)\mathrm{tr}(A_m(A'_m)).$$

有

$$\left|\sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k\geqslant 0}N^{\frac{1}{2}}(m)\mathrm{tr}(A_mA'_m)^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k\geqslant 0}N^3(m)\,\mathrm{tr}(A_mA'_m)\right|^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k\geqslant 0}\frac{1}{N^2(m)}\right|^{\frac{1}{2}},$$

当(8.5.12)满足时，(8.5.8)的右端是收敛的。(Musielak [1])，因而定理得证。

当 $n=2k$ 时，由(8.5.13)及(8.5.11)，同样可以证明定理成立。

§8.6 附注

对于 $SO(n)$ 上的一些结果，可以将 n 为奇偶的情形用统一的符号加以表示，若 $n=2k$，当 n 为偶数时；$n=2k+1$，当 n 为奇数时，令

$$G_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=(\lambda_1\cdots\lambda_k)^{n-2k}D(\lambda_1^2,\cdots\lambda_k^2),$$

D 为 Vamdermonde 行列式，$k=\left[\frac{n}{2}\right]$. 可将 $G_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ 简

写为 $G_n(\lambda)$。

于是 $SO(n)$ 的体积元素可以写成

$$\dot{\Gamma}_n = 2^{nk-k^2-\frac{k}{2}}\left|G_n\left(2i\sin\frac{\theta_1}{2},\cdots,2i\sin\frac{\theta_k}{2}\right|^2\Sigma d\theta_1\cdots d\theta_k.$$

以 $m=(m_1,\cdots,m_k)$ 为标签的表示的维数为

$$\frac{2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}}{(n-2)!(n-4)!\cdots(n-2k)!}G_n\left(l+\frac{n-2k}{2}\right).$$

Dirichlet 核可以统一地写为

$$\mathscr{D}_N(\Gamma)=\frac{2^{n-k-1}G_n\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\sin\left(N+\frac{n-2k+1}{2}\right)\theta_1}{\sin\frac{\theta_1}{2}},\cdots,\frac{\sin\left(N+\frac{n-2k+1}{2}\right)\theta_k}{\sin\frac{\theta_k}{2}}\right)}{(n-2)!\cdots(n-2k)!\,G_n\left(-2i\sin\frac{\theta_1}{2},\ \cdots,\ -2i\sin\frac{\theta_k}{2}\right)}$$

收敛定理成为：若 $u(\Gamma)\in C^{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]+p}$，$0<p<1$，则 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数的部分和 $s_N(\Gamma)$ 收敛于它自己。

绝对收敛定理成为：若$u(\Gamma)\in C^{5\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ $\Gamma\in SO(n)$，且

$$G_n^5\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots\frac{\partial}{\partial\theta_k}\right)H(\theta_1,\cdots,\theta_k)\in \mathrm{Lip}(2,\alpha),\ \alpha>\frac{1}{2},$$

则 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数绝对收敛。

证明过程也可以用统一的表达式来进行。

象第三章一样，如果用另外一些多重 Fourier 级数的绝对收敛定理，例如 Zygmund 定理，Szasz 定理等的推广形式，可以获得旋转群上的 Fourier 级数的绝对收敛的相应的定理。

结合第九章及 Chandrasekharan-Minakshisundaran [1] 第九章可以得到有关 Fourier 级数的球求和的绝对收敛的结果。

第九章　旋转群上的 Fourier 级数的球求和

§ 9.1　Fourier 级数的球求和

如同在酉群时的情形一样，也可以考虑旋转群上的 Fourier 级数的球求和，并且可以证明其相应的定理。也就是我们可以证明，如果函数 $u(\Gamma)$ 在 $SO(n)$ 上连续，那么它的 Fourier 级数可以 Abel，Gauss-Sommerfeld 或 δ 次 Riesz 求和于它自己，但

$$\delta > \frac{\dim SO(n) - 1}{2}.$$

当然这里所说的求和全是指球求和，这就是本章的内容，所用的方法与第五章相同，本章内容取自王世坤、董道珍[3].

我们知道，$SO(n)$ 上可积函数 $u(\Gamma)$；其 Fourier 级数，当 $n = 2k + 1$ 时为

$$\sum_{m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_k \geqslant 0} \sum_{i,j}^{N(m)} a_{ij}^m \varphi_{ij}^m(\Gamma). \tag{9.1.1}$$

当 $n = 2k$ 时为

$$\sum_{m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_k = 0} \sum_{i,j}^{N(m)} a_{ij}^m \phi_{ij}^m(\Gamma) + \sum_{m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_k > 0} \sum_{i,j}^{N(m)} (a_{ij}^m \phi_{ij}^m(\Gamma) + b_{ij}^m \psi_{ij}^m(\Gamma)). \tag{9.1.2}$$

这里 φ_{ij}^m，ϕ_{ij}^m，ψ_{ij}^m，a_{ij}^m，b_{ij}^m 的定义见第六章的 §6.1 的 (6.1.10)，(6.1.11)，(6.1.13)等。

所谓考虑球求和，就是把 Fourier 级数(9.1.1)及(9.1.2)考虑为

$$\sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_k \geqslant 0 \\ (l_1+\frac{1}{2})^2 + \cdots + (l_k+\frac{1}{2})^2 = q/4}} \sum_{i,j}^{N(m)} a_{ij}^m \varphi_{ij}^m(\Gamma) \right), \text{ 当 } n = 2k+1 \text{ 时} \tag{9.1.3}$$

及

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k=0\\ l_1^2+\cdots+l_k^2=q}}\sum_{i,j}^{N(m)} a_{ij}^m\phi_{ij}^m(\Gamma)\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k>0\\ l_1^2+\cdots+l_k^2=q}}\sum_{i,j}^{N(m)}\left(a_{ij}^m\phi_{ij}^m(\Gamma)+b_{ij}^m\psi_{ij}^m(\Gamma)\right)\right). \qquad (9.1.4)$$

设 $\varphi(t)$ 是定义在 $0\leqslant t<\infty$ 上的一个固定函数，满足 $\varphi(0)=1$. 所谓考虑某一种球求和，乃是考虑某一种平均

1. 当 $n=2k+1$ 时为

$$\sum_{q=0}^{\infty}\phi\left(\frac{\sqrt{q}}{2R}\right)\sum_{\substack{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k\geqslant 0\\ (l_1+\frac{1}{2})^2+\cdots+(l_k+\frac{1}{2})^2=\frac{q}{4}}}\sum_{i,j}^{N(m)} a_{ij}^m\varphi_{ij}^m(\Gamma). \qquad (9.1.5)$$

2. 当 $n=2k$ 时为

$$\sum_{q=0}^{\infty}\phi\left(\frac{\sqrt{q}}{R}\right)\left(\sum_{\substack{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k=0\\ l_1^2+\cdots+l_k^2=q}}\sum_{i,j}^{N(m)} a_{ij}^m\phi_{ij}^m(\Gamma)\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k>0\\ l_1^2+\cdots+l_k^2=q}}\sum_{i,j}^{N(m)}\left(a_{ij}^m\phi_{ij}^m(\Gamma)+b_{ij}^m\psi_{ij}^m(\Gamma)\right)\right). \qquad (9.1.6)$$

其中

$$\phi(t)=\varphi(t)/\varphi(\sqrt{q_0}/R). \qquad (9.1.7)$$

而

$$q_0=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)k(2k+1)}{12}, & \text{当 } n=2k+1;\\[2mm] \dfrac{(2k-1)k(k-1)}{6}, & \text{当 } n=2k;\end{cases} \qquad (9.1.8)$$

若当 $R\to\infty$ 时，(9.1.5)(9.1.6)极限存在，则称 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数可以按 φ 球求和于它的极限值.

还是与第五章一样，在这一章中具体的考虑如下几个 $\varphi(t)$.

(1) $\varphi(t)=e^{-t}$， 这是 Abel 求和；

(2) $\varphi(t)=e^{-t^2}$， 这是 Gauss-Sommerfeld 求和；

(3) $\varphi(t)=\begin{cases}(1+t^2)^{\delta}, & 当\ 0\leqslant t<1,\\ 0, & 当\ 1\leqslant t,\end{cases}$ 这是 δ 次 Riesz 求和。

§9.2 积分表达式

记(9.1.5)及(9.1.6)为 $s_R^{\phi}(\Gamma)$，这可以写成

$$\frac{1}{C}\int_{SO(n)}u(K\Gamma)\sum_{m\geqslant 0}\phi\left(\frac{\sqrt{q}}{R}\right)N(m)\sigma_m K(\dot{K}). \tag{9.2.1}$$

这里 m 表示标签 $m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k\geqslant 0$，而当 $n=2k$，标签 $m_1\geqslant\cdots\geqslant m_k>0$ 时，

$$\sigma_m(\Gamma)=\sigma_m^{\phi}(\Gamma)+\sigma_m^{\psi}(\Gamma).$$

而

$$q=\begin{cases}\left(l_1+\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(l_k+\dfrac{1}{2}\right)^2, & 当\ n=2k+1;\\ l_1^2+\cdots+l_k^2, & 当\ n=2k,\end{cases}$$

引理 9.2.1 若 $\varphi(t)$ 满足

(1) 在每个有限区间上绝对连续； (9.2.2)

(2) $\int_0^{\infty}|\varphi(t)|t^{\frac{k-1}{2}}dt<\infty$； (9.2.3)

则对任意实数 $p_1,\cdots,p_k$，有

$$\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{q=(l_1+p_1)^2+\cdots+(l_k+p_k)^2}\phi\left(\frac{\sqrt{q}}{R}\right)a_{l_1,\cdots,l_k}e^{i((l_1+p_1)\theta+\cdots+(l_k+p_k)\theta_k)}$$
$$=R\int_0^{\infty}g_{\theta}(t)H_{\theta}(tR)dt, \tag{9.2.4}$$

这里 ϕ 由(9.1.7)给出，

$$a_{l_1,\cdots,l_k}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}g(\theta_1,\cdots,\theta_k)$$
$$\cdot e^{-i(\theta_1+p_1)\theta_1+\cdots+(l_k+p_k)\theta_k)}d\theta_1\cdots d\theta_k, \tag{9.2.5}$$

$$g_{\theta}(t)=\frac{1}{\omega_{k-1}}\int_{\sigma}g(\theta_1+t\eta_1,\cdots,\theta_k+t\eta_k)d\sigma_{\eta}, \tag{9.2.6}$$

$$H_\phi(tR)=\frac{(tR)^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{R}{2}\right)}\int_0^\infty \phi(u)u^{\frac{k}{2}}J_{\frac{k-2}{2}}(utR)du, \qquad (9.2.7)$$

而 $g(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 为定义在 $0\leqslant\theta_1,\cdots,\theta_k\leqslant 2\pi$ 上的可积周期函数，$J_k(s)$ 是第一类 Bessel 函数，σ: $\eta_1^2+\cdots+\eta_k^2=1$，$\omega_{k-1}$ 为其球面积，等于 $2\pi^{\frac{k}{2}}/\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$.

引理当 $p_1=\cdots=p_k=0$ 时，即为 S. Bochner [1] 公式，对于一般情形，可由 S. Bochner 公式的证明推出。

由于任一 $\Gamma\in SO(n)$，可以表为

$$\Gamma=K(c_1\dotplus c_2\dotplus\cdots)K,\quad c_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i, & \sin\theta_i\\ -\sin\theta_i, & \cos\theta_i\end{pmatrix},$$

$$\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_k\geqslant 0.$$

当 $n=2k+1$ 时，直和终止于 $c_k\dotplus 1, K\in SO(n)$；而当 $n=2k$ 时，直和终止于 $c_k, K\in SO(n)$.

记

$$G_n(\xi)=(\xi_1\cdots\xi_k)^{n-2k}D(\xi_1^2,\cdots,\xi_k^2),\ \xi=(\xi_1,\cdots,\xi_k). \qquad (9.2.8)$$

应用华罗庚给出的代数方法(见第一章 §1.9)，可以得到

引理 9.2.2 恒等式

$$\sum_{m\geqslant 0} r^{l_1+\cdots+l_k}N(m)\sigma_m(\Gamma)G_n\left(2i\sin\frac{\theta_1}{2},\cdots,2i\sin\frac{\theta_k}{2}\right)$$

$$=\frac{2^{n-k-1}}{(n-2)!(n-4)!\cdots(n-2k)!}$$

$$\cdot\ G_n\left(-i\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,-i\frac{\partial}{\partial\theta_k}\right)\cdot(p_r(\theta_1)p_r(\theta_2)\cdots p_r(\theta_k)) \qquad (9.2.9)$$

成立，这里

$$p_r(\theta)=\begin{cases}\dfrac{2(1-r)\cos\dfrac{\theta}{2}}{1-2r\cos+r^2}, & \text{当 } n=2k+1;\\ \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}+1, & \text{当 } n=2k.\end{cases}$$

并且容易证明

$$G_{2k+1}\left(2i\sin\frac{\theta_1}{2},\cdots,2i\sin\frac{\theta_k}{2}\right)=s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right);$$

$$G_{2k}\left(2i\sin\frac{\theta_1}{2},\cdots,2i\sin\frac{\theta_k}{2}\right)=c\,(k-1,\cdots,1,0).$$

以 $g(\theta)$ 记(9.2.9)的右端，$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)$，记

$$F(r,R,\Gamma)=\sum_{m\geqslant 0}\phi\left(\frac{\sqrt{q}}{R}\right)r^{l_1+\cdots+l_k}N(m)\sigma_m(\Gamma),$$

则有

引理 9.2.3 等式

$$F(r,R,\Gamma)=\frac{R}{G_n\left(2i\sin\dfrac{\theta_1}{2},\cdots,2i\sin\dfrac{\theta_k}{2}\right)}\int_0^\infty g_\theta(t)H_\phi(tR)dt \tag{9.2.10}$$

成立，但 $\varphi(t)$ 必须满足(9.2,2)，(9.2.3).

证 (1) 当 $n=2k+1$ 时，在(9.2.4)中取 $p_1=\cdots=p_k=\dfrac{1}{2}$，并把 $g(\theta)$ 代入 (9.2.5)，则有

$$a_{l_1,\cdots,l_k}=\sum_{l'_1>\cdots>l'_k\geqslant 0}r^{l'_1+\cdots+l'_k}N(m')\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}s\left(l'_1+\frac{1}{2},\cdots\right.$$

$$\left.\cdots,l'_k+\frac{1}{2}\right)e^{-i((l_1+\frac{1}{2})\theta_1+\cdots+(l_k+\frac{1}{2})\theta_k)}d\theta_1\cdots d\theta_k,$$

代入(9.2.4)左端，得到(9.2.4)左端为

$$\sum_{\substack{l_1,\cdots,l_k\\ q=(l_1+\frac{1}{2})^2+\cdots+(l_k+\frac{1}{2})^2}}\phi\,(\sqrt{q}/R)\sum_{l'_1>\cdots>l'_k\geqslant 0}r^{l'_1+\cdots+l'_k}N(m')$$

$$
\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}s\left(l_1'+\frac{1}{2},\cdots,l_k'+\frac{1}{2}\right)
$$

$$
\cdot e^{-i((l_1+\frac{1}{2})\theta_1+\cdots+(l_k+\frac{1}{2})\theta_k}\cdot e^{i((l_1+\frac{1}{2})\varphi_1+\cdots+(l_k+\frac{1}{2})\varphi_k}d\theta_1\cdots d\theta_k
$$

$$
=\sum_{l_1,\cdots,l_k\geqslant 0}\phi(\sqrt{q/R})\sum_{l_1'>\cdots>l_k'\geqslant 0}r^{l_1'+\cdots+l_k'}N(m')
$$

$$
\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}s\left(l_1'+\frac{1}{2},\cdots,l_k'+\frac{1}{2}\right)
$$

$$
\cdot 2^k\cos\left(l_1+\frac{1}{2}\right)(\theta_1-\varphi_1)\cdots
$$

$$
\cos\left(l_k+\frac{1}{2}\right)(\theta_k-\varphi_k)\,d\theta_1\cdots d\theta_k
$$

$$
=\sum_{l_1,\cdots,l_k\geqslant 0}\phi(\sqrt{q/R})\sum_{l_1'>\cdots>l_k'\geqslant 0}r^{l_1'+\cdots+l_k'}N(m')(2i)^k
$$

$$
\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k\int_0^{2\pi}\cdots\int^{2\pi}\sum_{0(\mu_1,\cdots,\mu_k)}\delta_{1\cdots k}^{\mu_1\cdots\mu_k}\sin\left(l_{\mu_1}'+\frac{1}{2}\right)\theta_1\cdots
$$

$$
\sin\left(l_{\mu_k}'+\frac{1}{2}\right)\theta_k\cdot 2^k\cos\left(l_1+\frac{1}{2}\right)(\theta_1-\varphi_1)\cdots
$$

$$
\cos\left(l_k+\frac{1}{2}\right)(\theta_k-\varphi_k)d\theta_1\cdots d\theta_k
$$

$$
=\sum_{l_1>\cdots>l_k\geqslant 0}\phi(\sqrt{q/R})\,r^{l_1+\cdots+l_k}N(m)
$$

$$
s\left(l_1+\frac{1}{2}\cdots,l_k+\frac{1}{2}\right).
$$

由引理 9.2.1，(9.2.10)成立。

(2) 当 $n=2k$ 时，用同法可证，从略。

由 $g_\theta(t)$ 的定义(9.2.6)，(9.2.10)又可表为

$$
\frac{R}{G_n\left(2i\sin\frac{\theta_1}{2},\cdots,2i\sin\frac{\theta_k}{2}\right)\omega_{k-1}}
$$

$$
\cdot\int_0^\infty\int_\sigma g(\theta+t\eta)H_\phi(tR)d\sigma_\eta dt,
$$

还可表为 (9.2.11)

$$\frac{R}{G_n\left(2i\sin\frac{\theta_1}{2},\cdots,2i\sin\frac{\theta_k}{2}\right)\omega_{k-1}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}g(\theta+\xi)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}d\xi. \tag{9.2.12}$$

这里 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)$，$\eta=(\eta_1,\cdots\eta_k)$，$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_k)$，$d\xi=d\xi_1\cdots d\xi_k$，由引理 9.2.2，(9.2.12)即为

$$\frac{2^{n-k-1}\cdot R}{(n-2)!(n-4)!\cdots(n-2k)!\,G_n\left(2i\sin\frac{\theta_1}{2},\cdots,2i\sin\frac{\theta_k}{2}\right)\omega_{k-1}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\left[G_n\left(-i\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,-i\frac{\partial}{\partial\theta_k}\right)\cdot(p_r(\theta_1+\xi_1)\right.$$

$$\left.\cdot\,p_r(\theta_2+\xi_2)\cdots p_r(\theta_k+\xi_k))\right]\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}d\xi. \tag{9.2.13}$$

显然

$$G_n\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(p_r(\theta_1+\xi_1)\cdots p_r(\theta_k+\xi_k))$$

$$=G_n\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\cdot(p_r(\theta_1+\xi_1)\cdots p_r(\theta_k+\xi_k))$$

若当 $0\leqslant\lambda_1,\cdots,\lambda_k\leqslant n-2$ 时，

$$\left.\frac{\partial^{\lambda_1}}{\partial\xi_1^{\lambda_1}}\cdots\frac{\partial^{\lambda_k}}{\partial\xi_k^{\lambda_k}}\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}\right|_{|\xi|=\infty}=0. \tag{9.2.14}$$

对(9.2.13)进行分部积分，得到

$$\frac{2^{n-k-1}\cdot R}{(n-2)!(n-4)!\cdots(n-2k)!\,G_n\left(2i\sin\frac{\theta_1}{2},\cdots,2i\sin\frac{\theta_k}{2}\right)\omega_{k-1}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}p_r(\theta_1+\xi_1)\cdots p_r(\theta_k+\xi_k)$$

$$\cdot\,G_n\left(i\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,i\frac{\partial}{\partial\xi_k}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}d\xi. \tag{9.2.15}$$

记

$$s_R^\phi(r,\Gamma)=\frac{1}{C}\int_{SO(n)}u(\kappa\Gamma)\sum_{m\geqslant0}\phi\left(\frac{\sqrt{q}}{R}\right)r^{l_1+\cdots+l_k}$$

$$\cdot N(m)\sigma_m(K)\dot{K}.$$

若 $u^*(K\Gamma)$ 如第八章 §8.3 中那样给出，则

$$s_R^\varphi(r,\Gamma)=\frac{1}{C}\int_{SO(n)}u^*(K\Gamma)F(r,R,K)\dot{K},$$

记

$$\psi_\Gamma(-\theta_1,\cdots,-\theta_k)=\frac{1}{V(\Sigma)}\int_\Sigma u^*(K\Gamma)\Sigma. \qquad (9.2.16)$$

则 ψ_Γ 显然为 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的对称函数，于是

$$s_R^\varphi(r,\Gamma)=\frac{1}{2^{n-k-1}\pi^k}\int\cdots\int_{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_k>0}\psi_\Gamma(-\theta)F(r,R,K)$$

$$\cdot\left|G_n^2\left(2i\sin\frac{\theta_1}{2},\cdots,2i\sin\frac{\theta_k}{2}\right)\right|^2 d\theta_1\cdots d\theta_k. \qquad (9.2.17)$$

下面证明

定理 9.2.1 设 $u(\Gamma)$ 在 $SO(n)$ 上可积，$\varphi(t)$ 满足 (9.2.2)，(9.2.3)，(9.2.14)，那么它的 Fourier 级数按 φ 的球平均 $s_R^\varphi(\Gamma)$ 可以表为

$$\frac{R}{(n-2)!(n-4)!\cdots(n-2k)!\,\omega_{k-1}}\int\cdots\int_{\infty>\xi_1>\cdots>\xi_k>-\infty}$$

$$\cdot\psi_\Gamma'(\xi)\,G_n\left(2i\sin\frac{\xi}{2}\right)\left(G_n\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}\right)d\xi. \qquad (9.2.18)$$

这里 G_n 由(9.2.8)定义，ψ_Γ 由(9.2.16)定义，而 $2i\sin\frac{\xi}{2}$ 表示

$$\left(2i\sin\frac{\xi_1}{2},\cdots,2i\sin\frac{\xi_k}{2}\right).$$

(9.2.18)还可表为

$$\frac{R}{k!(n-2)!(n-4)!\cdots(n-2k)!}\int_0^\infty h_\Gamma(t)t^{k-1}dt. \qquad (9.2.19)$$

这里

$$h_\Gamma(t)=\frac{1}{\omega_{k-1}}\int\psi_\Gamma(t\eta)G_n\left(2i\sin\frac{t\eta}{2}\right)$$

$$\cdot\left(G_n\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}\right)\bigg|_{\xi=t\eta}d\eta. \qquad (9.2.20)$$

证 把(9.2.15)代入(9.2.17)，由 Fubini 定理，可得：$s_k^\phi(r,\Gamma)$ 等于

$$\frac{(-1)^{kn-k(k+1)}R}{(n-2)!(n-4)!\cdots(n-2k)!\,\omega_{k-1}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(G_n\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}\right)d\xi\,\frac{1}{\pi^k}$$

$$\cdot\int_{\pi\geqslant\theta_1>\cdots>\theta_k\geqslant 0}\cdots\int p_r(\theta_1+\xi_1)\cdots p_r(\theta_k+\xi_k)\phi_\Gamma(-\theta)$$

$$\cdot\,G_n\left(2i\sin\frac{\theta_1}{2},\cdots,2i\sin\frac{\theta_k}{2}\right)d\theta.$$

在上面积分中将 θ 次序进行各种可能的排列，并相应排列 ξ 之后，则有：$s_k^\phi(r,\Gamma)$ 等于

$$\frac{(-1)^{kn-k(k+1)}R}{k!(n-2)!(n-4)!\cdots(n-2k)!\,\omega_{k-1}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(G_n\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}\right)d\xi\,\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\pi^k}\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi p_r(\theta_1+\xi_1)\cdots p_r(\theta_k+\xi_k)\phi_\Gamma(-\theta)$$

$$\cdot\,G_n\left(2i\sin\frac{\theta_1}{2},\cdots,2i\sin\frac{\theta_k}{2}\right)d\theta.$$

令 $r\to 1$，由 Lebesgue 从属定理及多个变数的 Abel 定理，得到(9.2.18)成立。但当 n 为偶数时，证明中要用到条件(9.2.14)。

作变换 $\xi_1=t\eta_1,\cdots,\xi_k=t\eta_k$，这里 $\eta_1^2+\cdots+\eta_k^2=1$，计算变换的 Jacobian，即得(9.2.19)。

§ 9.3 Riesz 平均

所谓 δ 次 Riesz 求和，就是考虑平均(9.1.5)，(9.1.6)当取

$$\varphi(t)=\begin{cases}(1+t^2)^\delta, & \text{当 } 0\leqslant t<1;\\ 0, & \text{当 } 1\leqslant t;\end{cases}$$

时，$R\to\infty$的情形。

显然，$\varphi(t)$ 满足条件(9.2.2)；当 $\delta>\dfrac{k-1}{2}$ 时，满足条件(9.2.3)。而

$$H_\delta(|\xi|R) = \frac{2^{\delta-\frac{k}{2}+1}\Gamma(\delta+1)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1-\frac{q_0}{R^2}\right)^{-\delta} R^{k-1}$$

$$\cdot |\xi|^{k-1} V_{\delta+\frac{k}{2}}(|\xi|R). \tag{9.3.1}$$

不难证明(参阅第五章)(9.2.14)成立。因此，由定理9.2.1，立得 $SO(n)$ 上可积函数的 δ 次 Riesz 平均的积分表达式。当

$$\delta > \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)n}{2}-1\right)$$

时，可以写成

$$\frac{2^{\delta-k}\Gamma(\delta+1)R^k\left(1-\frac{q_0}{R^2}\right)^{-\delta}}{(n-2)!(n-4)!\cdots(n-2k)!\pi^{\frac{k}{2}}}\int_{\infty>\xi_1>\cdots>\xi_m>-\infty}\cdots\int$$

$$\cdot \phi_\Gamma(\xi) G_n\left(2i\sin\frac{\xi}{2}\right)\left(G_n\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)V_{\delta+\frac{k}{2}}(|\xi|R)\right)d\xi, \tag{9.3.2}$$

还可以写成(9.2.19)，但 $h_\Gamma(t)$ 为

$$\frac{2^{\delta-k}\Gamma(\delta+1)R^{k-1}\left(1-\frac{q_0}{R^2}\right)^{-\delta}}{\pi^{k/2}}\int_\sigma \phi_\Gamma(t\eta)$$

$$\cdot G_n\left(2i\sin\frac{t\eta}{2}\right)\left(G_n\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)V_{\delta+\frac{k}{2}}(|\xi|R)\right)\Bigg|_{\xi=t\eta} d\sigma_\eta. \tag{9.3.3}$$

根据 Bessel 函数性质，有

$$\frac{\partial}{\partial\xi_{j_1}}V_{\delta+\frac{k}{2}}(|\xi|R) = -R^2\xi_{j_1}V_{\delta+\frac{k}{2}+1}(|\xi|R);$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\xi_{j_1}^3}V_{\delta+\frac{k}{2}+1}(|\xi|R) = -R^6\xi_{j_1}V_{\delta+\frac{k}{2}+4}$$

$$\cdot(|\xi|R) + 3R^4\xi_{j_1}V_{\delta+\frac{k}{2}+3};$$

································

································

$$\frac{\partial^{2k-1}}{\partial \xi_{j_k}^{2k-1}} V_{\delta+\frac{k}{2}+(k-1)^2}(|\xi|R) = -R^{-2(2k-1)}\xi_{j_k}^{2k-1} V_{\delta+\frac{k}{2}+k^2}$$
$$\cdot(|\xi|R) + A_{2k-1}^1 R^{4k-3}\xi_{j_k}^{2k-3} V_{\delta+\frac{k}{2}+k^2-1}(|\xi|R)$$
$$+\cdots+(-1)^k A_{2k-1}^{k-1} R^{2k}\xi_{j_k} V_{\delta+\frac{k}{2}+k^2-k-1}(|\xi|R);$$

这里 $A_m^l = A_{m-1}^{l-1}(k-2l+1) + A_{m-1}^l$, $A_m^0 = 1$, 当 $m \leqslant l$ 时, $A_m^l = 0$, 由行列式性质, 知道

$$G_{2k+1}\left(i\frac{\partial}{\partial \xi}\right) V_{\delta+\frac{k}{2}}(|\xi|R)$$
$$= (-i)^{k^2} R^{2k^2} G_{2k+1}(\xi) \cdot V_{\delta+\frac{k}{2}+k^2}(|\xi|R),$$

同样,

$$G_{2k}\left(i\frac{\partial}{\partial \xi}\right) V_{\delta+\frac{k}{2}}(|\xi|R)$$
$$= i^{k(k-1)} R^{2k(k-1)} G_n(\xi) \cdot V_{\delta+\frac{k}{2}+k(k-1)}(|\xi|R),$$

因此,

$$G_n\left(i\frac{\partial}{\partial \xi}\right) V_{\delta+\frac{k}{2}}(|\xi|R)$$
$$= R^{2kn-2k(k+1)} G_n(-i\xi) \cdot V_{\delta+\frac{k}{2}+kn-k(k+1)}(|\xi|R). \tag{9.3.4}$$

有了(9.3.4), (9.3.3)可以表为

$$\frac{2^{\delta-\frac{k}{2}}\Gamma(\delta+1)R^{2kn-2k^2-k-1}\left(1-\frac{q_0}{R^2}\right)^{-\delta}}{\pi^{\frac{k}{2}}} t^{kn-k(k+1)}$$
$$\cdot V_{\delta+\frac{k}{2}+kn-k(k+1)}(tR) \cdot \int_\sigma \phi_\Gamma(t\eta) G_n\left(2\sin\frac{t\eta}{2}\right) G_n(\eta) d\sigma_\eta. \tag{9.3.5}$$

于是, 可以证明

定理 9.3.1 若 $u(\Gamma)$ 在 $SO(n)$ 上连续, 那么它的 Fourier 级数可以 δ 次 Riesz 求和于它自己, 但 $\delta > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)$.

先证

引理 9.3.1 设 $\varphi(t)$ 满足(9.2.2), (9.2.3) 和 (9.2.14), 那么当

$R^2 \geqslant q_0$ 时，

$$\frac{R}{(n-2)!!(n-4)!!\cdots(n-2k)!!\,\omega_{k-1}}$$

$$\cdot \int\cdots\int_{\infty>\xi_1\geqslant\cdots\geqslant\xi_k>-\infty} G_n\left(2i\sin\frac{\xi}{2}\right)\left(G_n\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k+1}}\right)d\xi=1. \tag{9.3.6}$$

这里 q_0 由(9.1.8)所定义。

证 当 $n=2k+1$ 时，

$$G_{2k+1}\left(2i\sin\frac{\xi}{2}\right)=s\left(k-\frac{1}{2},\cdots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$$

由于 H_ϕ 满足(9.2.14)，将(9.3.6)左边的积分分部积分 k^2 次，(9.3.6)的左边等于

$$\frac{(-1)^{k^2}R}{(2k-1)!!\cdots3!!1!!\,\omega_{k-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{G_n\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)(2i)^k\right.$$

$$\left.\cdot\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\xi_1\cdots\sin\frac{1}{2}\xi_k\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}d\xi,$$

这还可写成

$$\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}2^kR}{(2k-1)!!\cdots3!!1!!\,\omega_{k-1}}\int_0^\infty H_\phi(tR)dt$$

$$\cdot\int_\sigma\left\{G_n\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\xi_1\cdots\sin\frac{1}{2}\xi_k\right)\right\}\Bigg|_{\xi=t\eta}d\sigma_\eta. \tag{9.3.7}$$

但是

$$G_n\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\xi_1\cdots\sin\frac{1}{2}\xi_k\right)\Bigg|_{\xi=t\eta}=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

$$\cdot\frac{(2k-1)!!\cdots3!!1!!}{2^k}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)t\eta_1\cdots\cos\frac{1}{2}t\eta_k$$

及(参阅 S. Bochner [1])，

$$V_{\frac{k-2}{2}}(\sqrt{q_0}\,t)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\int_\sigma\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot t\eta_1\cdots\cos\frac{1}{2}t\eta_kd\sigma_\eta,$$

所以(9.3.7)等于

$$R\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}-1}\int_0^\infty V_{\frac{k-2}{2}}(\sqrt{q_0}\,t)H_{\phi}(tR)dt. \tag{9.3.8}$$

而(9.3.8)等于 1. (参阅 Bochner [1]).

对于 $n=2k$ 的情形，可以同样证明.

现在来证明定理 9.3.1.

由引理 9.3.1 及(9.3.5)，当 $\delta>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)$ 时，$u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数的 δ 次 Riesz 平均 $s_R^\delta(\Gamma)$ 与 $u(\Gamma)$ 之差即 $s_R^\delta(\Gamma)-u(\Gamma)$ 等于

$$\frac{R}{k!(n-2)!(n-4)!\cdots(n-2k)!}\int_0^\infty h_\Gamma(t)t^{k-1}dt, \tag{9.3.9}$$

这里 $h_\Gamma(t)$ 等于

$$\frac{2^{\delta-\frac{k}{2}}\Gamma(\delta+1)R^{2kn-2k^2-k-1}}{\pi^{\frac{k}{2}}\left(1-\frac{q_0}{R^2}\right)^\delta}t^{kn-k(k+1)}V_{\delta+\frac{k}{2}+kn-k(k+1)}$$
$$\cdot(tR)\int_\sigma\phi_\Gamma(t\eta)G_n\left(2\sin\frac{t\eta}{2}\right)G_n(\eta)d\sigma_\eta. \tag{9.3.10}$$

而

$$\phi_\Gamma(-\theta)=\frac{1}{V(\Sigma)}\int_\Sigma(u^*(w\Gamma)-u(\Gamma))\dot{\Sigma}.$$

把(3.3.9)的积分分成三部分，即 $s_R^\delta(\Gamma)-u(\Gamma)$ 等于

$$\frac{R}{R!(n-2)!(n-4)!-(n-2k)!}\left(\int_0^{\frac{1}{R}}+\int_{\frac{1}{R}}^\tau+\int_\tau^\infty\right)$$
$$=I_1+I_2+I_3.$$

这里 τ 为大于 $\frac{1}{R}$ 的一个固定常数.

先考虑 I_1，作变换 $Rt=u$，于是

$$I_1=\frac{R}{k!(n-2)!(n-4)!\cdots(n-2k)!}$$
$$\cdot\int_0^1 h_\Gamma\left(\frac{u}{R}\right)\frac{u^{k-1}}{R^{k-1}}du,$$

由华罗庚的一条定理(华罗庚[1]),易知

$$\left|G_n\left(2\sin\frac{u\eta}{2R}\right)\right| = O\left(R^{-kn+k(k+1)}\right). \tag{9.3.11}$$

由于 $u(\Gamma)$ 在 $SO(n)$ 上连续,所以

$$\psi_\Gamma\left(\frac{u\eta}{R}\right) = o(1). \tag{9.3.12}$$

因此,$I_1 = o(1)$.

再来考虑 I_2,这时 $\frac{1}{R} \leqslant t \leqslant \tau$,令

$$\lambda(t) = \int_0^t t^{k-1}dt\left|\int_\sigma t^{nk-k(k+1)}\psi_\Gamma(t\eta)G_n(\eta)G_n\right.$$

$$\left.\cdot\left(2i\sin\frac{t\eta}{2}\right)d\sigma_\eta\right|, \tag{9.3.13}$$

作交换 $t\eta = \eta'$,由(9.3.11),(9.3.12),则有

$$\lambda(t) = O\left(\int\cdots\int_{\eta_1^2+\cdots+\eta_k^2\leqslant t^2}\left|\psi_\Gamma(t\eta)G_n(\eta)G_n\left(2i\sin\frac{t\eta}{2}\right)\right|d\eta_1\cdots d\eta_k\right)$$

$$= o\left(t^{2nk-2k^2-k}\right). \tag{9.3.14}$$

当 $t\to 0$ 时,因此有

$$|I_2| = O\left(R^{2kn-2k^2-k}\int_{\frac{1}{R}}^\tau V_{\delta+\frac{k}{2}+kn-k(k+1)}(tR)d\lambda(t)\right),$$

由 Bessel 函数的性质(参阅 Chandrasekharan-Minakshisundaran [1])及(9.3.14),

$$|I_2| = O\left(R^{2kn-2k^2-k}\int_{\frac{1}{R}}^\tau (Rt)^{-\delta-\frac{k}{2}-kn+k(k+1)-\frac{1}{2}}d\lambda(t)\right)$$

$$= O\left(R^{-\delta+kn-k^2-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}t^{-\delta-\frac{k}{2}-kn+k(k+1)-\frac{1}{2}}\lambda(t)\Big|_{\frac{1}{R}}^\tau\right)$$

$$+ o\left(R^{-\delta+kn-k^2-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{R}}^\tau t^{2kn-2k^2-k}\cdot t^{-\delta-\frac{k}{2}-kn+k(k+1)-\frac{3}{2}}dt\right),$$

又因 $\delta > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right) = kn - k^2 - \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$，所以

$I_2 = o(1)$，

最后，考虑 I_3，如同 I_2 时一样，只是此时

$$\lambda(t) = O(t^{kn-k^2}), \quad 当 t \to \infty 时。$$

于是

$$I_3 = O(R^{-\delta+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)}).$$

这就证明了定理 9.3.1. 由于处理 I_3 的过程中，并未用到 $u(\Gamma)$ 的性质，因此，定义在 $SO(n)$ 上的可积函数 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数的 δ 次 Riesz 求和是局部性质，但

$$\delta > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right).$$

由定理 9.3.1 的证明过程中，可看出

系 9.3.1 若 $u(\Gamma) \in \mathrm{Lip}\ \gamma$，那么当

$$\delta > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right) + \gamma$$

时，有

$$s_R^{\delta}(\Gamma) - u(\Gamma) = O(R^{-\gamma}).$$

由此出发，可得一条收敛定理.

定理 9.3.2 若 $u(\Gamma) \in \mathrm{Lip}\ \gamma$，且

$N(m)\mathrm{tr}(A_m A'_m) = o((l_1^2 + \cdots + l_k^2)^{-\alpha})$， 若 $n = 2k+1$；

$N(m)(\mathrm{tr}(A_m A'_m) + \mathrm{tr}(B_m B'_m)) = o((l_1^2 + \cdots l_k^2)^{-\alpha})$，

若 $n = 2k$；

这里

$$\alpha = k - \frac{4\gamma(1+\beta)}{n(n-1)-2-4\beta+4p+\sigma}, \ \beta \geqslant 0, \ \sigma > 0,$$

那么

$$s_R^{\beta}(\Gamma) - u(\Gamma) = o(1).$$

证明与第五章的定理 5.8.2 完全相同.

由此立得

定理 9.3.3 若 $u(\Gamma)=\text{Lip}\ \gamma$，且

$N(m)\text{tr}(A_m A'_m)=o(1)$， 若 $n=2k+1$；

$N(m)(\text{tr}(A_m A'_m)+\text{tr}(B_m B'_{xm}))=o(1)$，$n=2k$；若 $n=2k$；

那么当

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)\geqslant\delta\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)$$

$$-\frac{\gamma}{2(\gamma+k)}\left(\frac{1}{2}n(n-1)-2k+1\right)$$

时，$s_k^\delta(\Gamma)$ 是收敛于 $u(\Gamma)$ 的。

同样在定理 9.3.2 中取 $\beta=0$，则得到一条 Tauber 型定理。

定理 9.3.4 若 $u(\Gamma)\in\text{Lip}\ \gamma$，且

$N(m)\text{tr}(A_m A'_m)=o((l_1^2+\cdots+l_k^2)^{-\alpha})$，若 $n=2k+1$；

$N(m)(\text{tr}(A_m A'_m)+\text{tr}(B_m B'_m))=o((l_1^2+\cdots+l_k^2)^{-\alpha})$，

若 $n=2k$；

那么 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数收敛于 $u(\Gamma)$，但

$$\alpha=k-\frac{4\gamma}{n(n-1)-2+4\gamma+\varepsilon},\quad \varepsilon>0.$$

§9.4 一条一般的收敛定理

在定理 9.3.1 的证明过程中，可以看出下述定理也是成立的。

定理 9.4.1 若 $u(\Gamma)$ 在 $SO(n)$ 上连续，如果 $\varphi(t)$ 满足条件 (9.2.2)，(9.2.3)及(9.2.14)，且

(1) 当 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{R}$ 时，

$$G_n\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}\bigg|_{\xi=t\eta}=O(R^{kn-k^2-1});\qquad(9.4.1)$$

(2) 当 $\frac{1}{R}\leqslant t<\infty$ 时，

$$G_n\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}\bigg|_{\xi=t\eta}=O(R^{-p-1}t^{-p-kn+k^2});\qquad(9.4.2)$$

而 $p>0$；那么由 φ 所定义的 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数的球平均(9.1.5)及(9.1.6)，记作 $s_R^\varphi(\Gamma)$；当 $R\to\infty$ 时，$s_R^\varphi(\Gamma)$ 是收敛于 $u(\Gamma)$ 的，且 $u(\Gamma)$ 的 Fourier 级数依 φ 意义下的球求和是局部性质.

取

$\varphi(t)=e^{-t}$，这是 Abel 求和，

$\varphi(t)=e^{-t^2}$，这是 Gauss-Sommerfeld 求和，

我们有

定理 9.4.2 若 $u(\Gamma)$ 在 $SO(n)$ 上连续，那么它的 Fourier 级数可以 Abel 及 Gauss-Sommerfeld 求和于它自己.

证 当 $\varphi(t)=e^{-t}$ 时(参阅第五章)，

$$H_\phi(|\xi|R)=\frac{(n-1)!}{2^{k-2}\left(\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right)^2}R^{k-1}|\xi|^{k-1}\frac{\exp\left(\frac{\sqrt{q_0}}{R}\right)}{(1+|\xi|^2R^2)^{\frac{k+1}{2}}};$$

当 $\varphi(t)=e^{-t^2}$ 时，

$$H_\phi(|\xi|R)=\frac{R^{k-1}\exp\left(\frac{q_0}{R^2}\right)}{2^{k-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}|\xi|^{k-1}\exp\left(\frac{-|\xi|^2R^2}{4}\right);$$

它们显然满足条件(9.2.2)，(9.2.3)，(9.2.14). 至于条件(9.4.1)和(9.4.2)，可以类似于推出(9.3.4)的过程而得到一个一般性的结果：若 $\lambda(t)$ 是有足够高的可微次数的一个函数，那么

$$G_n\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\lambda\left(\frac{|\xi|^2}{2}\right)=G_n(\xi)\lambda^{(kn-k(k+1))}(t)\Big|_{t=\frac{|\xi|^2}{2}}.$$

因此，当 $\varphi(t)=e^{-t}$ 时，

$$G_n\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}\Bigg|_{\xi=t\eta}$$

$$=\frac{(k-1)!\exp\frac{\sqrt{q_0}}{R}}{2^{k-2}\left(\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right)^2}R^{k-1}\cdot R^{nk-k(k+1)}G_n\left(\frac{\partial}{\partial(R\xi)}\right)$$

$$\cdot \frac{1}{(1+(\xi R)^2)^{\frac{k+1}{2}}}\Bigg|_{\xi=t\eta} = \frac{(k-1)!\exp\frac{\sqrt{q_0}}{R}}{2^{k-2}\left(\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right)^2}$$

$$\cdot R^{nk-k^2-1}G_n(Rt\eta)(-1)^{nk-k(k+1)}$$

$$\cdot \frac{(k+1)(k+3)\cdots(k+2nk-2k(k+1)-1)}{(1+R^2t^2)^{\frac{k+1}{2}+nk-k(k+1)}}$$

当 $\varphi(t)=e^{-t^2}$ 时，

$$G_n\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{k-1}}\Bigg|_{\xi=t\eta} = \frac{\exp\frac{q_0}{R^2}}{2^{k-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}R^{k-1}R^{nk-k(k+1)}$$

$$\cdot G_n\left(\frac{\partial}{\partial(R\xi)}\right)e^{\frac{-|\xi|^2R^2}{4}}\Bigg|_{\xi=t\eta} = \frac{(-1)^{kn-k(k+1)}\exp\frac{q_0}{R^2}}{2^{k-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\cdot 2^{kn-k(k+1)}}$$

$$\cdot R^{kn-k^2-1}G(Rt\eta)\exp\left(\frac{-R^2t^2}{4}\right).$$

容易验证，条件(9.4.1)及(9.4.2)是满足的。

第三部分　酉辛群上的调和分析

第十章　酉辛群的体积及 Fourier 级数的收敛判别法

§10.1　酉辛群的体积

在前面二部分中，分别讨论了酉群、旋转群上的调和分析．在这一部分中，将讨论酉辛群上的调和分析．在这一章中，首先给出酉辛群的体积及旁系的体积，并且给出在酉辛群上的 Fourier 级数的 Dirichlet 核及收敛判别法，在第十一章中，将讨论酉辛群上 Fourier 级数的 Cesàro 求和以及 Abel 求和，这里 Abel 求和是从 Cesàro 求和导出来的．在第十二章中，将给出酉辛群上的 Fourier 级数的球求和的一些结果，如同把酉群看作第一类复典型域的特征流形，正交群看作第一类实典型域的特征流形那样，我们可以把酉辛群看作第一类四元数体上典型域的特征流形．在最后一章中，讨论了第一类四元数体上的典型域的调和分析．从这个观点出发，也可以得到相同的 Poisson 核及 Abel 求和．

这一部分的内容，是我指导研究生陈广晓、贺祖琪做的工作(陈广晓[1]、[2]，贺祖琪，陈广晓[1]、[2]、[3]、[4])．

所谓 $2n$ 阶酉辛群 $USp(2n)$ 是指适合

$$UJU' = J, \qquad U\bar{U}' = I$$

的全体 $2n$ 阶复方阵 U 所成的群．而 J 为 $2n$ 级方阵，即

$$J = [J_0, J_0, \cdots, J_0], \qquad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

在这一节中，将证明 $USp(2n)$ 的体积为

$$\omega_{2n} = \frac{2^{2n^2+\frac{n}{2}}\pi^{n^2+n}}{\Gamma(2n)\Gamma(2n-2)\cdots\Gamma(2)}.$$

这是依据华罗庚[1]中的方法，由陈广晓[1]算出的.

引进 $USp(2n)$ 的裹变量表示法. 若 $U \in USp(2n)$，$\det(I + U) \neq 0$，令

$$H = i(I - U)(I + U)^{-1}, \qquad (10.1.1)$$

其逆变换是

$$U = (I + iH)(I - iH)^{-1}.$$

不难证明，H是 $2n$ 阶 Hermite 方阵，且适合

$$HJ + JH' = 0. \qquad (10.1.2)$$

由于 $\det(I - iH) = 0$ 是永远不可能的，所以除去 $USp(2n)$ 的一个低维流形，$USp(2n)$ 到适合(10.1.2)的 Hermite 阵的集合的变换(10.1.1)是一对一的.

由华罗庚[1]中还知道

$$\mathrm{tr}(\delta U\delta \bar{U}') = 4\,\mathrm{tr}((I + H^2)^{-1}dH(I + H^2)^{-1}dH),$$

这里 $\delta U = U^{-1}dU$. 这是因为U为酉群元素，故上式还是满足的，又由于U为辛群元素，故还要满足(10.1.2). 满足上述条件的H，也称为辛 Hermite 方阵.

引理 10.1.1

$$\dot{U} = 2^{n(2n-1)}(\det(I + H^2))^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\dot{H}. \qquad (10.1.3)$$

证 把 dH 写成 $(dH_{jk})_{1\le j,k\le n}$，这里 H_{jk} 为 2×2 方阵，那么

$$d\bar{H}'_{kj} = dH_{jk},\ J_0 dH_{jk} + d\bar{H}_{jk}J_0 = 0,$$

因而

$$dH_{jk} = \begin{pmatrix} d\alpha_{jk} + id\sigma_{jk}, & d\beta_{jk} + id\gamma_{jk} \\ d\beta_{jk} - id\gamma_{jk}, & -d\alpha_{jk} + id\sigma_{jk} \end{pmatrix}, \qquad (10.1.4)$$

而 $\alpha_{jk}, \beta_{jk}, \gamma_{jk}$ 是对 j,k 对称的，σ_{jk} 是反对称的. 因而

$$\dot{H} = 2^{\frac{n(4n-3)}{2}}\prod_{1\le j\le n}(d\alpha_{jj}d\beta_{jj}d\gamma_{jj})\prod_{1\le j<k\le n}(d\alpha_{jk}d\beta_{jk}d\gamma_{jk}d\sigma_{jk}). \qquad (10.1.5)$$

若 P 为一固定酉辛方阵，且

$$dK = PdHP^{-1}, \qquad (10.1.6)$$

那么 $\dot{K} = \dot{H}$。如果

$$dL = TdKT, \qquad (10.1.7)$$

这里

$$T = [a_1 I_0, \cdots, a_n I_0], \quad I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_j > 0, \qquad (10.1.8)$$

dL 可写成 $(dL_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ 的形式，而 dL_{jk} 仍为(10.1.4)的形式，对 dK 也是如此。由(10.1.7)及(10.1.8)知道

$$dL_{jk} = a_j a_k dK_{jk},$$

而

$$\dot{K} = 2^{n(n-1)} \prod_{1\leqslant j\leqslant n} \dot{K}_{jj} \prod_{1\leqslant j<k\leqslant n} \dot{K}_{jk} \qquad (10.1.9)$$

及 $\dot{L}$ 也有同样的式子，所以得到

$$\dot{L} = (\det T)^{2n+1}\dot{K}. \qquad (10.1.10)$$

对于辛 Hermite 方阵 H，可知存在酉辛方阵 P，使

$$PHP^{-1} = [b_1, -b_1, \cdots, b_n, -b_n], \quad (b_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n).$$

令

$$T = [\sqrt{1+b_1^2}\, I_0, \cdots, \sqrt{1+b_n^2}\, I_0], \qquad (10.1.11)$$

则

$$P(I + H^2)^{-1}P^{-1} = (T^{-1})^2. \qquad (10.1.12)$$

从而由(10.1.12)，(10.1.6)得到

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\delta U \overline{\delta U'}) &= 4\operatorname{tr}(P^{-1}(T^{-1})^2 PP^{-1} dKPP^{-1}(T^{-1})^2 PP^{-1} dKP) \\ &= 4\operatorname{tr}((T^{-1})^2 dK (T^{-1})^2 dK) \\ &= 4\operatorname{tr}(T^{-1} dK T^{-1} T^{-1} dK T^{-1}). \end{aligned}$$

由(10.1.11)及(10.1.10)知

$$\dot{U} = 2^{n(2n+1)}(\det T)^{-(2n+1)}\dot{K} = 2^{n(2n+1)} \det{}^{-\frac{2n+1}{2}}(I + H^2)\dot{H}.$$

这就是(10.1.3)。

设 H 为 $2n$ 阶辛 Hermite 方阵，$s > n - \frac{1}{4}$，

$$\mathscr{H}_n(s) = \int_H \frac{\dot{H}}{\det(I+H^2)^s}.$$

我们有

引理 10.1.2 当 $s > n - \frac{1}{4}$ 时，

$$\frac{\mathscr{H}_n(s)}{\mathscr{H}_{n-1}(s-1)} = 2^{4n-4s+\frac{3}{2}} \pi^{2n} \frac{\Gamma(4s-2n-1)}{\Gamma(2s)\Gamma(2s-1)} \tag{10.1.13}$$

成立.

证 仿照华罗庚[1]，把 $2n$ 阶辛 Hermite 方阵 H 写成

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & \bar{v}' \\ v & h \end{pmatrix}.$$

其中 H_1, h 分别为 $2n-2$ 阶和 2 阶辛 Hermite 方阵. 若

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_0 \end{pmatrix},$$

则由(10.1.2)，长方阵 v 适合

$$vJ_1 + J_0\bar{v} = 0. \tag{10.1.14}$$

若令

$$v = (A_1, \cdots, A_{n-1}),$$

则由(10.1.14)，易证

$$A_j = \begin{pmatrix} \alpha_j + i\sigma_j, & \beta_j + i\gamma_j \\ \beta_j - i\gamma_j, & -\alpha_j + i\sigma_j \end{pmatrix}.$$

于是

$$v\bar{v}' = I_0 \sum_{1 \leqslant j \leqslant n-1} (\alpha_j^2 + \beta_j^2 + \gamma_j^2 + \sigma_j^2).$$

易见

$$I + H^2 = \begin{pmatrix} I_1 + H_1^2 + \bar{v}'v, & \bar{P}' \\ P, & I + v\bar{v}' + h^2 \end{pmatrix}, \quad p = vH_1 + hv,$$

所以

$$\det(I+H^2) = \det(I_1 + H_1^2 + \bar{v}'v) \cdot \det(I_0 + h^2 + v\bar{v}' - p(I_1 + H_1^2 + \bar{v}'v)^{-1}\bar{p}').$$

存在酉辛方阵 P_1，使

$$H_1 = P_1 \Lambda_1 P_1^{-1}, \quad \Lambda_1 = [\lambda_1, -\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, -\lambda_{n-1}].$$

令

$$T_1 = P_1[\sqrt{1+\lambda_1^2}\, I_0, \cdots, \sqrt{1+\lambda_{n-1}^2}\, I_0]\, P_1^{-1},$$

$$v = uT_1,$$

那么易见

$$\overline{T}_1' = T_1,\ T_1 H_1 = H_1 T_1,\ I_1 + H_1^2 = T_1^2. \qquad (10.1.15)$$

设

$$\tau = P_1[\sqrt[4]{1+\lambda_1^2}, -\sqrt[4]{1+\lambda_1^2}, \cdots, \sqrt[4]{1+\lambda_{n-1}^2}, -\sqrt[4]{1+\lambda_{n-1}^2}]\, P_1^{-1},$$

那么 $T_1 = \tau^2$，且 τ 为辛 Hermite 方阵，所以 τ 满足

$$\tau J_1 = -J_1 \bar{\tau},$$

因此，

$$T_1 J_1 = \tau^2 J_1 = -\tau J_1 \bar{\tau} = J_1 \bar{\tau}^2 = J_1 \overline{T}_1.$$

由此由(10.1.14)可得

$$uJ_1 + J_0 \bar{u} = 0. \qquad (10.1.16)$$

同时，

$$\dot{v} = |\det T_1|^2 \dot{u} = \det(I_1 + H_1^2)\dot{u}, \qquad (10.1.17)$$

$$I_1 + H_1^2 + \bar{v}' v = T_1(I_1 + \bar{u}' u) T_1 \qquad (10.1.18)$$

成立. 若令

$$u = (B_1, \cdots, B_{n-1}),$$

则由(10.1.16)

$$B_j = \begin{pmatrix} l_j + ik_j, & f_j + ig_j \\ f_j - ig_j, & -l_j + ik_j \end{pmatrix},$$

所以

$$v\bar{v}' = \mu^2 I_0, \qquad (10.1.19)$$

这里

$$\mu^2 = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n-1} (l_j^2 + f_j^2 + g_j^2 + k_j^2).$$

由于

$$(I_1+\bar{u}'u)^{-1}=I_1-\bar{u}'(I_0+u\bar{u}')^{-1}u=I_1-\frac{1}{1+\mu^2}\bar{u}'u,$$

及(10.1.18)，(10.1.15)可得

$$\begin{aligned}-p(I_1+H_1^2+\bar{v}'v)^{-1}\bar{p}'&=-(vH_1+\hat{h}v)T_1^{-1}\\&\quad\cdot(I_1+\bar{u}'u)^{-1}T_1^{-1}(\bar{H}_1'\bar{v}'+\bar{v}\hat{h}')\\&=-(uT_1H_1T_1^{-1}+\hat{h}u)(I_1+\bar{u}'u)^{-1}(\overline{T_1H_1T_1^{-1}}'\bar{u}'+\bar{u}'\hat{h})\\&=-(uH_1+\hat{h}u)(I_1+\bar{u}'u)^{-1}(H_1\bar{u}'+\bar{u}'\hat{h})\\&=-(uH_1+\hat{h}u)\left(I_1-\frac{1}{1+\mu^2}\bar{u}'u\right)(H_1\bar{u}'+\bar{u}'\hat{h})\\&=-uH_1^2\bar{u}'-\frac{\mu^2}{1+\mu^2}\hat{h}^2+\frac{1}{1+\mu^2}\hat{h}_0^2-\frac{1}{1+\mu^2}(\hat{h}\hat{h}_0+\hat{h}_0\hat{h}),\end{aligned}$$

其中

$$\hat{h}_0=uH_1\bar{u}'.$$

由(10.1.16)，$\hat{h}_0$是辛 Hermite 方阵。

由于(10.1.18)，

$$\begin{aligned}\det(I_1+H_1^2+\bar{v}'v)&=\det T_1^2\det(I_1+\bar{u}'u)=\det(I+H_1^2)\\&\quad\cdot(1+\mu^2)^2,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\det(I_0+\hat{h}^2+v\bar{v}'-p(I_1+H_1^2+\bar{v}'v)^{-1}\bar{p}')\\&=\det\left(I_0+\frac{1}{1+\mu^2}(\hat{h}-\hat{h}_0)^2+v\bar{v}'-u(H_1^2\bar{u}')\right),\\&=\det\left(\frac{1}{1+\mu^2}(\hat{h}-\hat{h}_0)^2+I_0+u(T_1^2-H_1^2)\bar{u}'\right)\\&=\det\left(\frac{1}{1+\mu^2}(\hat{h}-\hat{h}_0)^2+(1+\mu^2)I_0,\right)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\det(I+H^2)&=\det(I_1+H_1^2)\cdot(1+\mu^2)^2\\&\quad\cdot\det\left(\frac{1}{1+\mu^2}(\hat{h}-\hat{h}_0)^2+(1+\mu^2)I_0\right)\\&=\det(I_1+H_1^2)\det((\hat{h}-\hat{h}_0)^2+(1+\mu^2)^2I_0).\end{aligned}$$

作变换

$$\hat{h}_1=\frac{\hat{h}-\hat{h}_0}{1+\mu^2},$$

则
$$\dot{h}_1 = (1+\mu^2)^{-3}\dot{h}.$$
于是
$$\det[(1+\mu^2)^2 I_0 + (h-h_0)^2]^{-s}\dot{h}$$
$$= (1+\mu^2)^{3-4s}\det(I_0+h_1^2)^{-s}\dot{h}_1.$$
这就得到(由(10.1.17))
$$\mathscr{H}_n(s) = 2^{2(n-1)}\int_{H_1}\det^{1-s}(I_1+H_1^2)\dot{H}_1$$
$$\cdot\int_u \frac{\dot{u}}{(1+\mu^2)^{4s-3}}\cdot\mathscr{H}_1(s). \qquad (10.1.20)$$
现在来计算 $\mathscr{H}_1(s)$，此时
$$H = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta+i\gamma \\ \beta-i\gamma, & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha,\beta,\gamma \text{ 为实数，}$$
所以 $H^2 = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)I_0$，而
$$\mathscr{H}_1(s) = \int_H \frac{\dot{H}}{\det(I+H^2)^s}$$
$$=(\sqrt{2})^3\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha d\beta d\gamma}{(1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{2s}} = 4\pi\cdot 2\sqrt{2}\int_0^\infty\frac{R^2dR}{(1+R^2)^{2s}}$$
$$= 2\sqrt{2}\cdot 2\pi B\left(\frac{3}{2},\ 2s-\frac{3}{2}\right) = (2\pi)^{\frac{3}{2}}\frac{\Gamma\left(2s-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2s)}.$$
再来计算 $\int_u \frac{\dot{u}}{(1+\mu^2)^{4s-3}}$，这等于
$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\frac{(\sqrt{2})^{4(n-1)}\prod_{j=1}^{n-1}(dl_j df_j dg_j dh_j)}{\left\{1+\sum_{j=1}^{n-1}(e_j^2+f_j^2+g_j^2+h_j^2)\right\}^{4s-3}}$$
$$= 2^{2(n+1)}\cdot\frac{2\pi^{2n-2}}{\Gamma(2n-2)}\int_0^\infty\frac{R^{4n-5}dR}{(1+R^2)^{4s-3}}$$
$$= 2^{2(n-1)}\pi^{2n-2}\frac{\Gamma(4s-2n-1)}{\Gamma(4s-3)}, \quad \text{若 } s \geqslant n-\frac{1}{4}.$$

代入(10.1.20)得到

$$\frac{\mathscr{H}_n(s)}{\mathscr{H}_{n-1}(s-1)} = 4^{2(n-1)}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\pi^{2n-2}\frac{\Gamma\left(2s-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{\Gamma(4s-2n-1)}{\Gamma(4s-3)}. \tag{10.1.21}$$

由于

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2^{1-2x}, \quad (x>0)$$

故(10.1.21)即为(10.1.13)

取 $s=n+\frac{1}{2}$, (10.1.13) 成为

$$\frac{\mathscr{H}_n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\mathscr{H}_{n-1}\left(n-\frac{1}{2}\right)} = 2^{-\frac{1}{2}}\pi^{2n}\frac{1}{\Gamma(2n)}. \quad (n>1)$$

若令 $H_0(s)=1$，则上式对 $n=1$ 也成立．因而有

$$\mathscr{H}_n\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2^{-n/2}\pi^{n(n+1)}\frac{1}{\Gamma(2n)\Gamma(2n-2)\cdots\Gamma(2)}.$$

因此得到(陈广晓[1])．

定理 10.1.1 $USp(2n)$ 的体积为

$$\omega_n = \frac{2^{\frac{n}{2}+2n^2}\pi^{n+n^2}}{\Gamma(2n)\Gamma(2n-2)\cdots\Gamma(2)}. \tag{10.1.22}$$

§ 10.2 酉辛群旁系的体积

任一酉辛方阵 w 可表为

$$w = P\Lambda P^{-1}, \quad \Lambda = [e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}, e^{-i\theta_n}],$$

$\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant 0$．其中 P 为酉辛方阵，由于 $e^{\pm i\theta_j}(1 \leqslant j \leqslant$

n）是 w 的特征根，故 Λ 是唯一确定的．又若

$$w = P\Lambda P^{-1} = P_1\Lambda P_1^{-1},$$

如果 w 的特征根各不相同，则 $P_1^{-1}P = [e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \cdots, e^{i\varphi_n}, e^{-i\varphi_n}]$．所有形如 $[e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \cdots, e^{i\varphi_n}, e^{-i\varphi_n}]$ 的酉辛方阵组成 $USp(2n)$ 的一个子群，记 $[USp(2n)]$ 为 $USp(2n)$ 对此子群的旁系的集合，则 P_1 与 P 属于同一个旁系，于是除了有重特征根的酉辛方阵所成的低维流形可能例外，任一酉辛方阵必一一对应于一个 Λ 及 $[USp(2n)]$ 的一个旁系．

令 $\delta P = P^{-1}dP$，那么

$$\overline{\delta P'} = -\delta P, \quad J\delta P + \delta P' \cdot J = 0. \qquad (10.2.1)$$

于是

$$\delta P = i\left(\begin{pmatrix} \delta\alpha_{jk} + i\delta\sigma_{jk}, & \delta\beta_{jk} + i\delta\gamma_{jk} \\ \delta\beta_{jk} - i\delta\gamma_{jk}, & -\delta\alpha_{jk} + i\delta\sigma_{jk} \end{pmatrix}\right)_{1\le j,k\le n}, \qquad (10.2.2)$$

其中 $\delta\alpha_{jk}, \delta\beta_{jk}, \delta\gamma_{jk}$ 对 j, k 称对，$\delta\sigma_{jk}$ 对 j, k 反对称．而且

$$\mathrm{tr}(\delta w\overline{\delta w'}) = \mathrm{tr}(\delta\Lambda\overline{\delta\Lambda'}) + \mathrm{tr}([\delta P, \Lambda]\,[\overline{\delta P, \Lambda'}]), \qquad (10.2.3)$$

这里

$$[\delta P, \Lambda] = \delta P \cdot \Lambda - a \cdot \delta P.$$

现在来证明(10.2.3)．由于

$$\delta w = P\Lambda^{-1}P^{-1}dP\Lambda P^{-1} - dP \cdot P^{-1} + P\Lambda^{-1}d\Lambda P^{-1},$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\delta w\bar{\delta} w') = 2[& -\mathrm{tr}(\delta P\delta P) + \mathrm{tr}(\Lambda^{-1}\delta P\Lambda\delta P) \\ & - \mathrm{tr}(\Lambda^{-1}\delta Pd\Lambda) + \mathrm{tr}(\delta P\delta\Lambda) - \mathrm{tr}(\delta\Lambda\delta\Lambda) \\ = 2(& -\mathrm{tr}(\delta P\delta P) + \mathrm{tr}(\Lambda^{-1}\delta P\Lambda\delta P))\end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}(\delta\Lambda\delta\Lambda) = \mathrm{tr}(\delta\Lambda\overline{\delta\Lambda'}) + \mathrm{tr}([\delta P, \Lambda]\overline{[\delta P, \Lambda]'}).$$

这就得到

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\delta w\overline{\delta w'}) = & 2\sum_{j=1}^{n} d\theta_j^2 + 4\sum_{j<k}|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2(d\alpha_{jk}^2 + d\sigma_{jk}^2) \\ & + 4\sum_{j<k}|e^{i\theta_j} - e^{-i\theta_k}|^2(d\beta_{jk}^2 + d\gamma_{jk}^2)\end{aligned}$$

$$+2\sum_{j=1}^{n}|e^{i\theta_j}-e^{-i\theta_j}|^2(d\beta_{jj}^2+d\gamma_{jj}^2).$$

其中不出现 $d\alpha_{jj}$，用 $\dot{V}$ 表示由微分矢量 $d\alpha_{jk}$，$d\beta_{jk}$，$d\gamma_{jk}$，$d\sigma_{jk}$ 所张成的积分元素、而以 $[\dot{P}]$ 等于 $2^{n(2n-\frac{1}{2})}\dot{V}$ 表示 $[USp(2n)]$ 上的积分元素，那么

$$\dot{W}=[\dot{P}]\prod_{j<k}|(e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k})(e^{i\theta_j}-e^{-i\theta_k})|^2$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{n}|e^{i\theta_j}-e^{-i\theta_j}|^2d\theta_1d\theta_2\cdots d\theta_n. \tag{10.2.4}$$

现在来计算 $[USp(2n)]$ 的体积 ω_n'. (1.2.4) 在 $USp(2n)$ 上积分得

$$\omega_n=\omega_n'2^{\frac{n}{2}}\int\cdots\int_{\pi\geq\theta_1\geq\cdots\geq\theta_n\geq0}J(\theta_1,\cdots,\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n, \tag{10.2.5}$$

此处

$$J(\theta_1,\cdots,\theta_n)=\prod_{j=1}^{n}|e^{i\theta_j}-e^{-i\theta_j}|^2\prod_{j<k}$$

$$\cdot|(e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k})(e^{i\theta_j}-e^{-i\theta_k})|^2. \tag{10.2.6}$$

这等于

$$(-1)^n\prod_{j=1}^{n}(e^{i\theta_j}-e^{-i\theta_j})D(e^{i\theta_1},e^{-i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n},e^{-i\theta_n}),$$

这里 D 为 Vandermonde 行列式乘以 $(-1)^{\frac{2n(2n-1)}{2}}=(-1)^n$. 易见

$$J=s\cdot\bar{s},$$

这里 $s=s(1,2,\cdots,n)$，而 $s(1,2,\cdots,n)$ 的定义见(6.1.6).

由于 $J(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 为 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 的对称函数，故

$$\int\cdots\int_{\pi\geq\theta_1\geq\cdots\geq\theta_n\geq0}J(\theta_1,\cdots,\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n$$

$$=\frac{1}{n!}\cdot\int_0^{\pi}\cdots\int J(\theta_1,\cdots,\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n$$

J 对每个 θ_i 来讲都是偶函数，所以

$$\int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant 0} J(\theta_1,\cdots,\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int J(\theta_1,\cdots,\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int\prod_{j=1}^{n}(e^{i\theta_j}-e^{-i\theta_j})\sum_{k_1,L_1,\cdots,k_n,L_n}\delta_{k_1L_1\cdots k_nL_n}\cdot e^{i(k_1-L_1)\theta_1}\cdots e^{i(K_n-L_n)\theta_n}d\theta_1\cdots d\theta_n,$$

其中 $(k_1,L_1,\cdots,k_n,L_n)$ 为 $(1,2,\cdots,2n)$ 的一个排列，而

$$\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})e^{i\theta(k-L)}d\theta=\begin{cases}0, & \text{若 } k-L\neq\pm 1;\\ 2\pi, & \text{若 } k-L=-1;\\ -2\pi. & \text{若 } k-L=1.\end{cases}$$

于是得到

$$\int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant 0} Jd\theta_1\cdots d\theta_n=(2\pi)^n,$$

所以

$$\omega_n'=\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}.$$

最后得到(陈广晓[1])

定理 10.2.1 $USp(2n)$ 的旁系的体积 ω_n' 等于

$$\frac{2^{n^2-\frac{n}{2}}(2\pi)^{n^2}}{\Gamma(2n)\Gamma(2n-2)\cdots\Gamma(2)}. \tag{10.2.7}$$

§10.3 酉辛群上的 Fourier 级数

若 $w\in USp(2n)$, $A_f(w)$ 为标记为 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ 的不可约表示，此处 $f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0$，则 $A_f(w)$ 仍为酉辛方阵，其阶数为 $N(f)$，它等于 (Weyl [1])

$$\frac{\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant n} l_j\prod\limits_{j<k}(l_j^2-l_k^2)}{(2n-1)!(2n-3)!\cdots 3!1!}=\frac{l_1\cdots l_nD(l_1^2,\cdots,l_n^2)}{n!D(n^2,\cdots,1^2)}, \tag{10.3.1}$$

此处

$$l_1 = f_1 + n, \cdots, l_n = f_n + 1.$$

表示 $A_f(w)$ 的特征记为 $\chi_f(w)$，若 w 的特征根为 $e^{\pm i\theta_1}, \cdots, e^{\pm i\theta_n}$，那么

$$\chi_f(w) = \frac{s_\theta(l_1, \cdots, l_n)}{s_\theta(n, \cdots, 1)} = \frac{s_\theta(l)}{s_\theta(n)}, \tag{10.3.2}$$

这里 $s_\theta(l_1, \cdots, l_n)$ 的定义见(6.1.6).

记

$$\Phi_f(U) = \sqrt{\frac{N(f)}{C}} A_f(U) = (\phi_{ij}^f(U))_{1 \leq i,j \leq N(f)},$$

其中 C 为 $USp(2n)$ 的体积，则 $\{\phi_{ij}^f(U)\}$ 组成 $USp(2n)$ 上的就范正交系，若 $u(U)$ 在 $USp(2n)$ 上可积，那么它有 Fourier 级数

$$\sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n \geq 0} \operatorname{tr}(C_f \Phi_f'(U)), \tag{10.3.3}$$

其中

$$C_f = \int_{USp(2n)} u(W) \Phi_f(\overline{W}) \dot{W}. \tag{10.3.4}$$

§10.4 Fourier 级数的 Dirichlet 核及收敛判别法

若 $u(U)$ 是 $USp(2n)$ 上可积函数，如同第三章一样，可以考虑 $u(U)$ 的 Fourier 级数(10.3.3)的部分和

$$s_N(U) = \sum_{N \geq l_1 > \cdots > l_n > 0} \operatorname{tr}(C_{f_1 \cdots f_n} \Phi'_{f_1 \cdots f_n}(U)), \tag{10.4.1}$$

这里

$$l = (l_1, \cdots, l_n), l_1 = f_1 + n, l_2 = f_2 + n - 1, \cdots, l_n = f_n + 1.$$

与第三章一样，$s_N(U)$ 可以写成

$$\frac{1}{C} \int_{USp(2n)} u(VU) \mathscr{D}_N(\overline{V}) \dot{V}, \tag{10.4.2}$$

其中

$$\mathscr{D}_N(\overline{V}) = \sum_{N \geq l_1 > \cdots > l_n > 0} N(f) \chi_f(\overline{V}) \tag{10.4.3}$$

为 Dirichlet 核。可以证明如下的(贺祖琪,陈广晓[1])

定理 10.4.1 若 $u(U)$ 是 $USp(2n)$ 上可积函数，它的 Fourier 级数(10.3.3)的部分和(10.4.1)可以表为(10.4.2)而 Dirichlet 核(10.4.3)等于

$$\frac{(-1)^n \det(d_N^{(2i-1)}(\theta_j))_{1\leq i,j\leq n}}{\prod_{k=1}^{n}(2n-2k+1)!\det(\sin(n-i+1)\theta_j)_{1\leq i,j\leq n}}, \tag{10.4.4}$$

这里 $e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$ 为 $\overline{V}$ 的特征根，

$$d_N(\theta) = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

为一个变数的 Dirichlet 核。

证 由于

$$\chi_l(\overline{V}) = \frac{s(l)}{s(n)},$$

这里 $l=(l_1,\cdots,l_n)$, $n=(n,n-1,\cdots,1)$. 而 $s(s)$ 的定义见(6.1.6)。而

$$N(f) = \lim_{\substack{\theta_1\to 0\\ \cdots\\ \theta_n\to 0}} \chi_f,$$

它等于

$$\begin{vmatrix} l_1^{2n-1}, & l_2^{2n-1}, & \cdots, & l_n^{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_1^3, & l_2^3, & \cdots, & l_n^3 \\ l_1, & l_2, & \cdots, & l_n \end{vmatrix} \Big/ \prod_{k=1}^{n}(2n-2k+1)!.$$

于是

$$\mathscr{D}_N(\overline{V}) =$$

$$\sum_{N\geq l_1>\cdots>l_n>0}\begin{vmatrix}\sin l_1\theta_1, & \cdots, & \sin l_1\theta_n\\ \sin l_2\theta_1, & \cdots, & \sin l_2\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin l_n\theta_1, & \cdots, & \sin l_n\theta_n\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}l_1^{2n-1}, & l_2^{2n-1}, & \cdots, & l_n^{2n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ l_1^3, & l_2^3, & \cdots, & l_n^3\\ l_1, & l_2, & \cdots, & l_n\end{vmatrix}$$

$$\cdot\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(2n-2k+1)!\det(\sin(n-i+1)\theta_j)_{1\leq i,j\leq n}}.$$

由引理 8.1.1 即得

$$\mathscr{D}_N(\overline{V})=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\det\left(\sum_{l=1}^{N}l^{2i-1}\sin l\theta_j\right)_{1\leq i,j\leq n}}{(2n-1)!(2n-3)!\cdots3!1!\det(\sin(n-i+1)\theta_j)_{1\leq i,j\leq n}}.$$

但

$$\sum_{l=1}^{N}l^{2i-1}\sin l\theta_j=(-1)^i d_N^{(2i-1)}(\theta_j),$$

即得(10.4.4)。

有了 Dirichlet 核，就可以有 Fourier 级数的收敛判别法。

若 $\overline{V}\in USp(2n)$，则可写成

$$V_1\begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & & & & \\ & e^{-i\theta_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{i\theta_n} & \\ & & & & e^{-i\theta_n}\end{pmatrix}V_1^{-1},\quad V_1\in USp(2n).$$

取 $\Gamma\in USp(2n)$，使

$$\Gamma\begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & & & & \\ & e^{-i\theta_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{i\theta_n} & \\ & & & & e^{-i\theta_n}\end{pmatrix}\Gamma^{-1}=\begin{pmatrix}e^{i\theta_{\nu_1}} & & & & \\ & e^{-i\theta_{\nu_1}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{i\theta_{\nu_n}} & \\ & & & & e^{-i\theta_{\nu_n}}\end{pmatrix},$$

这里 $(\nu_1,\cdots,\nu_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列. 再取 $\Gamma_1\in USp(2n)$，使

$$
\Gamma_1\begin{pmatrix}
e^{i\theta_{v_1}} & & & & & & & \\
& e^{i\theta_{v_1}} & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & \\
& & & e^{i\theta_{v_k}} & & & & \\
& & & & e^{-i\theta_{v_k}} & & & \\
& & & & & \ddots & & \\
& & & & & & e^{i\theta_{v_n}} & \\
& & & & & & & e^{-i\theta_{v_n}}
\end{pmatrix}
$$

$$
\Gamma_1^{-1}=\begin{pmatrix}
e^{i\theta_{v_1}} & & & & & & & \\
& e^{-i\theta_{v_1}} & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & \\
& & & e^{-i\theta_{v_k}} & & & & \\
& & & & e^{i\theta_{v_k}} & & & \\
& & & & & \ddots & & \\
& & & & & & e^{i\theta_{v_n}} & \\
& & & & & & & e^{-i\theta_{v_n}}
\end{pmatrix},
$$

记

$$
\overline{V}^*=V_1\Gamma_1\Gamma\begin{pmatrix}
e^{i\theta_1} & & & \\
& e^{-i\theta_1} & & \\
& & \ddots & \\
& & & e^{i\theta_n} & \\
& & & & e^{-i\theta_n}
\end{pmatrix}\Gamma^{-1}\Gamma_1^{-1}V_1^{-1},
$$

于是

$$
\frac{1}{C}\int_{USp(2n)}u(V^*U)\mathscr{D}_N(V)\dot{V}=\frac{1}{C}\int_{USp(2n)}u(VU)\mathscr{D}_N(V)\dot{V},
$$

作所有可能的 V^*，将 $u(V^*U)$ 加起来，除以 $2^n n!$，记作 $u^*(VU)$，于是

$$
s_N(U)=\frac{1}{C}\int_{USp(2n)}u^*(VU)\mathscr{D}_N(\overline{V})\dot{V}.
$$

记

$$
g(\theta_1,\cdots,\theta_n)=\frac{1}{C}\int_{USp(2n)}u^*(VU)[\dot{V}],
$$

这是 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 的周期对称偶函数，于是

$$s_N(U) = 2^{n^2+n} \int\cdots\int_{\pi \geq \varphi_1 \geq \cdots \geq \varphi_n \geq -\pi} g(\theta_1, \cdots, \theta_n)$$

$$\cdot \mathscr{D}_N(\bar{V}) \prod_{j=1}^{n} \sin^2\theta_j \prod_{1 \leq i, j \leq n} (\cos\theta_i - \cos\theta_j)^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

由于

$$\frac{1}{C} \int_{USp(2n)} \mathscr{D}_N(\bar{V}) \dot{V} = 1,$$

故有 $s_N(U) - u(U)$ 等于

$$\frac{(-1)^n 2^{n^2+n}}{\prod_{k=1}^{n} (2n-2k+1)!} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int (g(\theta_1, \cdots, \theta_n) - u(U))$$

$$\cdot \frac{\det(d_N^{(2j-1)}(\theta_j))_{1 \leq i, j \leq n}}{\det(\sin(n-i+1)\theta_j)_{1 \leq i, j \leq n}}$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{n} \sin^2\theta_j \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos\theta_i - \cos\theta_j)^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n,$$

但

$$\prod_{j=1}^{n} \sin^2\theta_j \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos\theta_i - \cos\theta_j)^2 = 2^{-n(n-1)}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \sin n\theta_1, & \sin n\theta_2, & \cdots, & \sin n\theta_n \\ \sin(n-1)\theta_1, & \sin(n-1)\theta_2, & \cdots, & \sin(n-1)\theta_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sin\theta_1, & \sin\theta_2, & \cdots, & \sin\theta_n \end{vmatrix}^2.$$

于是 $s_N(U) - u(U)$ 等于

$$\frac{(-1)^n 2^{2n}}{\prod_{k=1}^{n} (2n-2k+1)!} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int (g(\theta_1, \cdots, \theta_n) - u(U))$$

$$\cdot \det(d_N^{(2j-1)}(\theta_j))_{1 \leq i, j \leq n} \det(\sin(n-i+1)\theta_j)_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$\cdot d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

由行列式性质，易知上式即为

$$\frac{(-1)^n 2^{2n}}{\prod_{k=1}^{n} (2n-2k+1)!} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int (g(\theta_1, \cdots, \theta_n) - u(U))$$

$$\cdot \det(\sin(n-i+1)\theta_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} d'_N(\theta_1) d_N^{(3)}(\theta_2)$$
$$\cdots d_N^{(2n-1)}(\theta_n)\, d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

若 $u(U)\in C^{n^2}$，由于 $g(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 的周期性，对上式进行分部积分,就得到，$s_N(U)-u(U)$ 等于

$$\frac{(-1)^n 2^{2n}}{\prod_{k=1}^{n}(2n-2k+1)!}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int \frac{\partial}{\partial\theta_1}\frac{\partial^3}{\partial\theta_2^3}\cdots\frac{\partial^{2n-1}}{\partial\theta_n^{2n-1}}$$
$$\cdot\left[(g(\theta_1,\cdots,\theta_n)-u(U))\det(\sin(n-i+1)\theta_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right]$$
$$\cdot d_N(\theta_1)d_N(\theta_2)\cdots d_N(\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

如同第三章那样，由此可证如下的(贺祖琪,陈广晓[1])

定理 10.4.2 若 $u(U)$ 为 $US_p(2n)$ 上可积函数，且 $u(U)\in C^{n^2+p}$，$(0<p\leqslant 1)$，那么它的 Fourier 级数的部分和(10.4.1)收敛于 $u(U)$，且有

$$|S_N(U)-u(U)|\leqslant A\cdot\max\left(\left(\frac{\ln^{n^2}N}{N}\right)^{\frac{1}{n+1}},\ \frac{\ln^{n-1}N}{N^p}\right).$$

证 证明的方法与定理 3.4.1 完全一样，命

$$I_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n}=\int_{-\pi}^{\pi}\int\frac{\partial^{\mu_1}}{\partial\theta_1^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial^{\mu_n}}{\partial\theta_n^{\mu_n}}(g(\theta_1,\cdots,\theta_n)-u(U))$$
$$\cdot\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial\theta_1^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial^{\nu_n}}{\partial\theta_n^{\nu_n}}\begin{vmatrix}\sin n\theta_1, & \cdots, & \sin n\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_n\end{vmatrix}$$
$$\cdot d_N(\theta_1)\cdots d_N(\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n,$$

此处 $\mu_k+\nu_k=2k-1,\mu_k\geqslant 0,\ \nu_k\geqslant 0,\ k=1,2,\cdots,n$。

先考虑 $I_{0,\cdots,0}$。将积分区域分解为：

$$\pi\geqslant\theta_{i_1}\geqslant\theta_{i_2}\geqslant\cdots\geqslant\theta_{i_n}\geqslant-\pi,$$

这里 $(i_1,\cdots,i_n)$ 为 $(1,\cdots,n)$ 的一个排列，我们考虑其中之一，例如

$$\pi\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi.$$

其它区域可同样处理，再将上述区域分解为：

$$R_1:\delta\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi,$$

$$R_2: \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_n: \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \delta \geqslant \theta_n \geqslant -\pi,$$

$$R_{n+1}: \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant \delta.$$

这里取 $0 < \delta < 1$。

记 I_j 为

$$\int_{R_j} \cdots \int (g(\theta_1, \cdots, \theta_n) - u(U)) \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{\partial^3}{\partial \theta_2^3} \cdots \frac{\partial^{2n-1}}{\partial \theta_n^{2n-1}}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \sin n\theta_1, & \cdots, & \sin n\theta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin \theta_1, & \cdots, & \sin \theta_n \end{vmatrix} d_N(\theta_1) \cdots d_N(\theta_n) d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

于是

$$I_{0,0,\cdots,0} = I_1 + I_2 + \cdots + I_{n+1}.$$

由于

$$\int_\delta^\pi f(\theta) d_N(\theta) d\theta = O\left(\frac{1}{\delta N}\right) \text{及} \int_{-\pi}^\pi |d_N(\theta)| d\theta = O(\ln N),$$

若 $f(\theta) \in C'$，于是

$$I_2 = O\left(\frac{\ln^{n-1} N}{\delta N}\right).$$

同理可证

$$I_p = O\left(\frac{\ln^{n-p+1} N}{\delta^{p-1} N}\right), \quad p = 3, \cdots, n+1.$$

再将 R_1 分解为

$$Q_1: \delta \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\delta,$$

$$Q_2: \delta \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \theta_{n-1} \geqslant -\delta \geqslant \theta_n \geqslant -\pi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_{n+1}: \delta \geqslant \theta_1 \geqslant -\delta \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi,$$

于是 I_1 分解为 J_p，它等于

$$\int_{Q_p} \cdots \int (g(\theta_1, \cdots, \theta_n) - u(U)) \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{\partial^3}{\partial \theta_2^3} \cdots \frac{\partial^{2n-1}}{\partial \theta_n^{2n-1}}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\sin n\theta_1, & \cdots, & \sin n\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_n\end{vmatrix} d_N(\theta_1)\cdots d_N(\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n,$$

$p=1,2,\cdots,n+1$。

同样可证

$$J_p=O\left(\frac{\ln^{n-p+1}N}{\delta^{p-1}N}\right),\quad p=2,\cdots,n+1.$$

至于 J_1，由于

$$\delta\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta,$$

故有

$$g(\theta_1,\cdots,\theta_n)-u(U)=w(\delta),$$

这里 w 为 $u(U)$ 的连续模，由于 $u(U)\in C^{n^2}$，故

$$J_1=O(\delta\ln^n N).$$

综合上述，即得

$$I_{0,\cdots,0}=O(\delta\ln^n N)+O\left(\frac{\ln^{n-1}N}{\delta N}\right)+\cdots$$
$$+O\left(\frac{\ln^{n-p+1}N}{\delta^{p-1}N}\right)+\cdots+O\left(\frac{1}{\delta^n N}\right).$$

取 $\delta=(N\ln^n N)^{\frac{-1}{n+1}}$，就有

$$I_{0,\cdots,0}=O\left(\left(\frac{\ln^{n^2}N}{N}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right).$$

再考虑 $I_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n}$，此处 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 不全为零.

若 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 中有奇数，这时 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n$ 中有偶数，如 $\nu_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 是偶数，则有

$$I_{\mu_1,\mu_2\cdots\mu_n}=\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int\frac{\partial^{\mu_1}}{\partial\theta_1^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial^{\mu_n}}{\partial\theta_n^{\mu_n}}(g(\theta_1,\cdots,\theta_n)$$
$$-u(U))\cdot\sin\theta_j F(\theta_1,\cdots,\theta_n)d_N(\theta_1)\cdots$$
$$d_N(\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n,$$

此处 $F(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 为一可微函数。由此即得

$$I_{\mu_1\cdots\mu_n}=O\left(\frac{\ln^{n-1}N}{N}\right).$$

若 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 全为偶数，则 $v_1,v_2,v_3,\cdots,v_i$ 全为奇数，这时至少有二个 v_i,v_j 相等 $(i\neq j)$。易证

$$\frac{\partial^{v_1}}{\partial\theta_1^{v_1}}\cdots\frac{\partial^{v_n}}{\partial\theta_n^{v_n}}\begin{vmatrix}\sin n\theta_1, & \cdots, & \sin n\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_n\end{vmatrix}$$

$$=\sin\frac{\theta_i-\theta_j}{2}\cdot G(\theta_1,\cdots,\theta_n),$$

此处 $G(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 为可微函数，由此容易得到

$$I_{\mu_1,\cdots,\mu_n}=O\left(\frac{\ln^{n-1}N}{NP}\right).$$

这就证明了定理.

§10.5 Fourier 级数的绝对收敛

如同第三章那样，可以讨论 $USp(2n)$ 上可积函数 $u(U)$ 的 Fourier 级数(10.3.3)的绝对收敛，若 C_f 为其 Fourier 系数(10.3.4)，那么

$$C_f\overline{C}_f'=\iint u(V)u(U)\,\overline{\Phi_f(V)}\;\overline{\Phi_f'(U)}\,\dot V\dot U$$

$$=\frac{N(f)}{C}\iint u(V)u(WV)A_f(W')\dot V\dot W.$$

从而

$$\mathrm{tr}(e_f\overline{C}_f')=\frac{N(f)}{C}\iint u(V)u(WV)\chi_f(W)\dot W\dot V.$$

设

$$g(W)=\int_{USp(2n)}u(V)u(WV)\dot V,$$

就有

$$\frac{\mathrm{tr}(C_f\overline{C}_f')}{N(f)}=\frac{1}{C}\int_{USp(2n)}g(W)\chi_f(W)\dot W.$$

设 W 的特征根为 $e^{i\theta_1},e^{-i\theta},\cdots,e^{i\theta_n},e^{-i\theta_n}$，设

$$h(\theta_1,\cdots,\theta_n)=\frac{2^{3n}\pi^n}{C}\int_{[USp(2n)]}g(W)[\dot W].$$

于是

$$\frac{\operatorname{tr}(C_f\overline{C}_f')}{N(f)}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\theta_n\geqslant-\pi}\cdots\int h(\theta_1,\cdots,\theta_n)\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\sin l_1\theta_1, & \cdots, & \sin l_1\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin l_n\theta_1, & \cdots, & \sin l_n\theta_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\sin n\theta_1, & \cdots, & \sin n\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_n\end{vmatrix}d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

如同§10.4中那样，用 h^* 代替 h，h^* 是对称偶函数，而且有

$$\frac{\operatorname{tr}(C_f\overline{C}_f')}{N(f)}=\frac{(2i)^{-2n}}{(2\pi)^n}\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi}\cdots\int h^*(\theta_1,\cdots,\theta_n)s_\theta(l)s_\theta(n)$$

$$\cdot d\theta_1\cdots d\theta_n=\frac{(2i)^{-2n}}{(2\pi)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int h^*(\theta_1,\cdots,\theta_n)$$

$$\cdot\sin l_1\theta_1\cdots\sin l_n\theta_n s_\theta(n)d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

命

$$H(\theta_1,\cdots,\theta_n)=h^*(\theta_1,\cdots,\theta_n)s_\theta(n),\qquad(10.5.1)$$

则 $H(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 是奇函数．如果 $(i_1,\cdots,i_n)$ 是 $(1,2,\cdots n)$ 的一个排列，则

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\int H(\theta_1,\cdots,\theta_n)\sin l_{i_1}\theta_1\cdots\sin l_{i_n}\theta_n$$

$$\cdot d\theta_1\cdots d\theta_n=\delta_{1\cdots n}^{i_1\cdots i_n}\frac{\operatorname{tr}(C_f\overline{C}_f')}{N(f)}.\qquad(10.5.2)$$

$H(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 的多重 Fourier 级数为

$$\sum_{l_1,l_2,\cdots,l_n}d_{l_1\cdots l_n}\sin l_1\theta_1\cdots\sin l_n\theta_n,\qquad(10.5.3)$$

这里

$$d_{l_1\cdots l_n}=\frac{\operatorname{tr}(C_f\overline{C}_f')}{N(f)},\quad 若\ l_1>l_2>\cdots>l_n>0;$$

$$d_{l_1\cdots l_n}=0,\qquad 若\ l_1,l_2,\cdots,l_n\ 中至少有两个相同;$$

$d_{l_{i_1}\cdots l_{i_n}}=\delta_{1\cdots n}^{i_1\cdots i_n}d_{l_1\cdots l_n}$，若 $(i_1,\cdots,i_n)$ 为 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列，且 $l_1>l_2>\cdots>l_n>0$．这样(10.5.3)可写成

$$\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n>0}\frac{\operatorname{tr}(C_f\overline{C}_f')}{N(f)}(2i)^n s_\theta(l).\qquad(10.5.4)$$

记

$$P\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\theta_n}$$
$$\cdot D\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right).$$

若 $l_1>l_2>\cdots>l_n>0$，

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int\left(P\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)H(\theta_1,\cdots,\theta_n)\right)$$
$$\cdot\cos l_1\theta_1\cdots\cos l_n\theta_n d\theta_1\cdots d\theta_n$$
$$=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)}\delta_{1\cdots n}^{i_1\cdots i_n}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int\left(\frac{\partial}{\partial\theta_{i_1}}\frac{\partial^3}{\partial\theta_{i_2}^3}\cdots\frac{\partial^{2n-1}}{\partial\theta_{i_n}^{2n-1}}\right.$$
$$\left.\cdot H(\theta_1,\cdots,\theta_n)\right)\cos l_1\theta_1\cdots\cos l_n\theta_n d\theta_1\cdots d\theta_n$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int H(\theta_1,\cdots,\theta_n)\sin l_1\theta_1\cdots\sin l_n\theta_n d\theta_1\cdots d\theta_n$$
$$\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{(i_1,\cdots,i_n)}\delta_{1\cdots n}^{i_1\cdots i_n}l_{i_1}l_{i_2}^3\cdots l_{i_n}^{2n-1}$$
$$=(-1)^n(2n-1)!(2n-3)!\cdots3!1!\operatorname{tr}(C_f\overline{C}_f').$$

即 $P\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)H(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 的多重 Fourier 级数为

$$2^{-n}(-1)^n(2n-1)!(2n-3)!\cdots3!1!\sum_{l_1>\cdots>l_n>0}$$
$$\cdot\operatorname{tr}(C_f\overline{C}_f')C_\theta(l_1,\cdots,l_n),$$

这里 $C_\theta(l)$ 由(6.1.1)定义，同样可证：

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)\right)^3H(\theta_1,\cdots,\theta_n)$$

的多重 Fourier 级数为

$$2^{-n}(-1)^{3n}((2n-1)!(2n-3)!\cdots3!1!)^3$$
$$\cdot\sum_{l_1>\cdots>l_n>0}(N(f))^2\operatorname{tr}(C_f\overline{C}_f')C_\theta(l_1,\cdots,l_n),$$

$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)\right)^5H(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 的多重 Fourier 级数为

$$2^{-n}((2n-1)!(2n-3)!\cdots 3!1!)$$

$$\cdot \sum_{l_1>\cdots>l_n>0} (N(f))^4 \operatorname{tr}(C_f \overline{C}_f') C_\delta(l_1, \cdots, l_n).$$

由这些结果，如同第三章中那样，可证(贺祖琪，陈广晓[1])

定理 10.5.1 若 $u(U) \in C^{n^2}$，且

$$P\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial\theta_n}\right) H(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathrm{Lip}(2, \alpha),$$

$$\alpha > \frac{1}{r} - \frac{1}{2},$$

则级数

$$\sum_{f_1 \geq f_2 \cdots \geq f_n \geq 0} |\operatorname{tr}(C_f \overline{C}_f')|^r$$

收敛，但 $1 > r > \frac{2}{3}$.

定理 10.5.2 若 $u(U) \in C^{3n^2}$，且

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)\right)^3 H(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathrm{Lip}(2, \alpha),$$

$$\alpha > \frac{1}{r} - \frac{1}{2},$$

则级数

$$\sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n \geq 0} \left(\sum_{j,k=1}^{N(f)} |C_{jk}^f| |\varphi_{jk}^f|\right)^{2r}$$

收敛，但 $1 > r > \frac{2}{3}$.

定理 10.5.3 若 $u(U) \in C^{5n^2}$，且

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)\right)^5 H(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathrm{Lip}(2, \alpha), \quad \alpha > \frac{1}{2},$$

则 $u(U)$ 的 Fourier 级数(10.3.3)绝对收敛.

第十一章　酉辛群上 Fourier 级数的 Cesàro 求和与 Abel 求和

§11.1　Cesàro 和的定义

若 $u(U)$ 是 $USp(2n)$ 上可积函数，如同第二章一样，可以考虑 $u(U)$ 的 Fourier 级数(10.3.3)的 Cesàro 求和，这时 Cesàro (c, α) 和定义为

$$\sum_{nN \geqslant f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0} B^{\alpha}_{f_1 \cdots f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1 \cdots f_n} \Phi'_{f_1 \cdots f_n}(U)), \qquad (11.1.1)$$

这里

$$B^{\alpha}_{f_1 \cdots f_n} = \frac{2^{-2n}}{CN(f)} \int_{USp(2n)} \chi_{f_1 \cdots f_n}(\overline{V}) K^{\alpha}_N(V) \dot{V}, \qquad (11.1.2)$$

而 $K^{\alpha}_N(V)$ 为 Cesàro (c, α) 核，它等于

$$\frac{1}{B^{\alpha}_N (2A^{\alpha}_N)^{n(2n+1)}} \left\{ \frac{\det\left[\sum_{k=0}^{N} A^{\alpha-1}_{N-k} V^k (I - \overline{V}'^{2k+1})\right]}{\det(I - \overline{V}')} \right\}^{n+\frac{1}{2}}, \qquad (11.1.3)$$

其中

$$B^{\alpha}_N = \frac{1}{C} \int_{USp(2n)} \frac{1}{(2A^{\alpha}_N)^{n(2n+1)}} \cdot \left\{ \frac{\det\left[\sum_{k=0}^{N} A^{\alpha-1}_{N-k} V^k (I - \overline{V}'^{2k+1})\right]}{\det(I - \overline{V}')} \right\}^{n+\frac{1}{2}} \dot{V}, \qquad (11.1.4)$$

$$A^{\alpha}_N = (\alpha + N)(\alpha + N - 1) \cdots (\alpha + 1)/N!, \quad \alpha > -1,$$

而 C 为 $USp(2n)$ 的体积.

先证明

定理 11.1.1　$USp(2n)$ 上可积函数 $u(U)$ 的 Fourier 级数

(10.3.3)的 Cesàro (c, α) 和(11.1.1)可以表为

$$\frac{1}{C}\int_{USP(2n)} u(VU)K_N^\alpha(V)\dot{V}, \qquad (11.1.5)$$

这里 $K_N^\alpha(V)$ 由(11.1.3)所定义.

证 设 $e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}, e^{-i\theta_n}$ 是 $\bar{V}$ 的特征根，那么

$$\sum_{nN\geq l_1\geq\cdots\geq l_n\geq 0} B^\alpha_{l_1\cdots l_n}N(f)\begin{vmatrix}\sin l_1\theta_1, & \cdots, & \sin l_1\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin l_n\theta_1, & \cdots, & \sin l_n\theta_n\end{vmatrix}$$

$$= K_N^\alpha(V)\begin{vmatrix}\sin n\theta_1, & \cdots, & \sin n\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_n\end{vmatrix}. \qquad (11.1.6)$$

事实上，上式左边等于

$$\sum_{nN\geq l_1\geq\cdots\geq l_n\geq 0}\ \sum_{(i_1,\cdots,i_n)}\delta^{i_1 i_2\cdots i_n}_{1,2,\cdots,n}\ B^\alpha_{l_1\cdots l_n}N(f)\sin l_1\theta_{i_1}\cdots\sin l_n\theta_{i_n},$$

而

$$B^\alpha_{l_1\cdots l_n}N(f) = \frac{2^{-2n}}{C}\int_{USP(2n)}\chi_{l_1\cdots l_n}(\bar{V})K_N^\alpha(V)\dot{V}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\pi\geq\theta_1\cdots\geq\theta_n\geq-\pi}\begin{vmatrix}\sin l_1\theta_1, & \cdots, & \sin l_1\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin l_n\theta_1, & \cdots, & \sin l_n\theta_n\end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\sin n\theta_1, & \cdots, & \sin n\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_n\end{vmatrix}\cdot K_N^\alpha(V)\,d\theta_1\cdots d\theta_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int \sin l_1\theta_1\cdots\sin l_n\theta_n$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\sin n\theta_1, & \cdots, & \sin n\theta_n\\ \sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_n\end{vmatrix}K_N^\alpha(V)d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

于是

$$\delta_{1\cdots n}^{j_1\cdots j_n} B_{j_1\cdots j_n}^{\alpha} N(f) = \frac{1}{(2\alpha)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int \sin l_1\theta_{j_1}\cdots\sin l_n\theta_{j_n}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\sin n\theta_1, & \cdots, & \sin n\theta_n\\ \sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_1\end{vmatrix} K_N^{\alpha}(V)d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

由此易得(11.1.6)，由(11.1.6)即得(11.1.5)。

这里所定义的 Cesàro (c,α) 和，当 α 趋于无穷时，即为 Abel 和，且 (c,α) 核也成为 Poisson 核. 将在 §11.6——11.7 中讨论。

§11.2 Cesàro 核的半定正性

我们将证明(贺祖琪、陈广晓[2])

定理 11.2.1 设 $u(U)$ 在 $USp(2n)$ 上连续，$U\in USp(2n)$. 那么它的 Fourier 级数(10.3.3)可以 (c,α) 求和于它自己，但

$$\alpha > \frac{2n-2}{2n+1}.$$

为了证明上述 Riesz 型定理，先来证明，当 $\alpha > \frac{2n-2}{2n+1}$时，Cesàro 核是"半定正"的，即要证明

定理 11.2.2 当 $\alpha > \frac{2n-2}{2n+1}$ 时，

$$\frac{1}{C}\int_{USp(2n)} |K_N^{\alpha}(V)|\dot{V} \leqslant M, \tag{11.2.1}$$

这里 M 为只与 n, α 有关，而与 N 无关的常数.

证 用归纳法、当 $n=1$ 时，(1.2.1)显然成立. 当 N 趋于无穷时，$|B_N^{\alpha}|$ 不趋于零，因此，只要证明

$$I = \frac{2^{n^2+n}}{(2\alpha)^n}\int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi} |\sigma_N^{\alpha}(\theta_1)\cdots\sigma_N^{\alpha}(\theta_n)|^{2n+1}$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{n}\sin^2\theta_j\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\cos\theta_i-\cos\theta_j)^2 d\theta_1\cdots d\theta_n \tag{11.2.2}$$

有界即可，这里

$$\sigma_N^\alpha(\theta)=\frac{1}{2A_N^\alpha\sin\frac{1}{2}\theta}\sum_{k=0}^{N}A_{N-k}^{\alpha-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta.$$

如同第二章 §2.3 中那样，取 $\delta\geqslant\frac{1}{N}$，将积分区域分解为 R_1，$\cdots,R_n,R_{n+1}$（定义见 §2.3），(11.2.2) 的积分，其积分区域在 R_j 上者为 I_j，于是

$$I=I_1+\cdots+I_{n+1}.$$

如同 §2.3 一样，先考虑 I_1，将 R_1 分解为 $R_{2n},R_{2\overline{n-1}},\cdots,R_{22}$，$R_{21}$，(11.2.2) 的积分，其积分区域在 R_{ij} 上者为 I_{ij}，用 §2.3 中的方法，可证

$$I_{2n}\leqslant A\sum_{s_1=0}^{2n-2}\sum_{s_2=0}^{2}\cdots\sum_{s_n=0}^{2}a_{s_1\cdots s_n}\int_{\delta\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\delta}\cdots\int|1-\cos\theta_2|^{s_2}\cdots$$
$$|1-\cos\theta_n|^{s_n}|\sigma_N^\alpha(\theta_2)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^{2n+1}$$
$$\cdot\prod_{j=2}^{n}\sin^2\theta_j\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(\cos\theta_i-\cos\theta_j)^2d\theta_2\cdots d\theta_n$$
$$\cdot\int_\delta^\pi|1-\cos\theta_1|^{s_1}|\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^{2n+1}d\theta_1,$$

这里 A 为仅与 n 有关的常数，$a_{s_1\cdots s_n}$ 为仅与 $s_1,\cdots,s_n$ 有关的常数，上式右边的积分与 $s_1,\cdots,s_n$ 有关，记为 $I_{s_1\cdots s_n}$. 如同 §2.3 中那样，可以证明

$$I_{s_1\cdots s_n}=O((N\delta)^{2n-2-(2n+1)\alpha}),$$

当 $\alpha>\frac{2n-2}{2n+1}$ 时成立，这里用到了归纳假定，于是

$$I_{2n}=O((N\delta)^{2n-2-(2n+1)\alpha}).$$

同样可证

$$I_{2\overline{n-j}}=O((N\delta)^{(j+1)(2n-2(j+1)-(2n+1)\alpha)}),\ j=0,1,2,\cdots,n-1.$$

这样就得到

$$I_1=O((N\delta)^{(2n-2-(2n+1)\alpha)})+O((N\delta)^{2(2n-4-(2n+1)\alpha)})$$
$$+\cdots+O((N\delta)^{-n(2n+1)\alpha}).$$

如同处理 I_1 那样，可证

$$I_3 = O((N\delta)^{2(2n-4-(2n+1)\alpha)}) + O((N\delta)^{3(2n-6-(2n+1)\alpha)}) + \cdots + O((N\delta)^{-n(2n+1)\alpha}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_{n+1} = O((N\delta)^{-n(2n+1)\alpha}).$$

再考虑 I_1。将 R_1 分解为 $s_1, s_2, \cdots, s_{n+1}$（定义见 §2.3）。记(11.2.2)的积分，其积分区域在 s_k 上者为 J_k，同处理 I_{ij} 那样，可证

$$J_2 = O((N\delta)^{(2n-2-(2n+1)\alpha)}) + O((N\delta)^{2(2n-4-(2n+1)\alpha)}) + \cdots + O((N\delta)^{-n(2n+1)\alpha}),$$

$$J_3 = O((N\delta)^{2(2n-4-(2n+1)\alpha)}) + \cdots + O((N\delta)^{-n(2n+1)\alpha}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$J_{n+1} = O((N\delta)^{-n(2n+1)\alpha}).$$

最后考虑 J_1。

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{2^{n^2+n}}{(2\pi)^n} \int\cdots\int_{\delta\geq\theta_1\geq\cdots\geq\theta_n\geq-\delta} |\sigma_N^\alpha(\theta_1)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^{2n+1} \\ &\quad \cdot \prod_{j=1}^{n} \sin^2\theta_j \prod_{1\leq i<j\leq n} (\cos\theta_i - \cos\theta_j)^2 d\theta_1\cdots d\theta_n \\ &\leq A \int\cdots\int_{\delta\geq\theta_2\geq\cdots\geq\theta_n\geq-\delta} |\sigma_N^\alpha(\theta_2)\cdots\sigma_N^\alpha(\theta_n)|^{2n+1} \\ &\quad \cdot \prod_{j=2}^{n} \sin^2\theta_j \prod_{2\leq i<j\leq n} (\cos\theta_i - \cos\theta_j)^2 d\theta_2\cdots d\theta_n \\ &\quad \cdot \int_{\theta_2}^{\delta} |\sigma_N^\alpha(\theta_1)|^{2n+1} \sin^2\theta_1 \prod_{j=2}^{n} (\cos\theta_1 - \cos\theta_j)^2 d\theta_1 \\ &\leq A'N^{4n-1}\delta^{4n-1} = O((N\delta)^{4n-1}). \end{aligned}$$

总结起来，

$$I = O((N\delta)^{4n-1}) + O((N\delta)^{2n-2-(2n+1)\alpha}) + O((N\delta)^{2(2n-4-(2n+1)\alpha)}) + \cdots + O((N\delta)^{-n(2n+1)\alpha}).$$

取 $\delta = \frac{1}{N}$，即得 $I = O(1)$，这就证明了(11.2.1)。

§11.3 Riesz 型定理的证明

由定义知道

$$\frac{1}{C}\int_{USp(2n)} K_N^{\alpha}(V)\dot{V} = 1.$$

将(11.1.1)记作 $\sum\limits_N^{\alpha}(U)$，它可写成 $\frac{1}{C}\int_{USp(2n)} u(VU)K_N^{\alpha}(V)\dot{V}$. 因此，

$$\sum_N^{\alpha}(U) - u(U) = \frac{1}{C}\int_{USp(2n)} (u(VU) - u(U))K_N^{\alpha}(V)\dot{V}. \tag{11.3.1}$$

要证上式右边，当N趋于无穷时，趋于零. 而(11.3.1)的右边为

$$\frac{1}{\beta_N^{\alpha}}\underset{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi}{\int\cdots\int} g(\theta_1,\cdots,\theta_n)|\sigma_N^{\alpha}(\theta_1)\cdots\sigma_N^{\alpha}(\theta_n)|^{2n+1}$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{n}\sin^2\theta_j\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\cos\theta_i - \cos\theta_j)^2 d\theta_1\cdots d\theta_n, \tag{11.3.2}$$

其中

$$g(\theta_1,\cdots,\theta_n) = \frac{2^{n^2+n}}{C}\int_{[USp(2n)]}(u(VU) - u(U))[\dot{V}].$$

将(1.3.2)的积分区域分解为 $R_1, R_2, \cdots, R_{n+1}$，记(11.3.2)在 R_j 上的积分为 I'_j，由于 $u(U)$ 在 $USp(2n)$ 上连续，所以

$$|g(\theta_1,\cdots,\theta_n)| \leqslant L,\quad \pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi,$$

这里L为绝对常数. 当N趋于无穷时，$|B_N^{\alpha}|$不趋于零，取 $\delta\geqslant\frac{1}{N}$，可证

$$I'_2 = O((N\delta)^{2n-2-(2n+1)\alpha}) + O((N\delta)^{2(2n-4-(2n+1)\alpha)})$$
$$+\cdots + O((N\delta)^{-n(2n+1)\alpha});$$
$$I'_3 = O((N\delta)^{2(2n-4-(2n+1)\alpha)}) + \cdots + O((N\delta)^{-n(2n+1)\alpha});$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$I'_{n+1} = O((N\delta)^{-n(2n+1)\alpha}).$$

对于 I_1'，如同处理 I_1 一样，将 R_1 分解为 $s_1, \cdots, s_{n+1}$，记(11.3.2)在 s_k 上的积分为 J_k'，可证

$$|J_2'| + \cdots + |J_{n+1}'| = O((N\delta)^{2n-2-(2n+1)\alpha})$$
$$+ O((N\delta)^{2(2n-4-(2n+1)\alpha)})$$
$$+ \cdots + O((N\delta)^{-n(2n+1)\alpha}).$$

最后考虑 J_1'。

$$J_1' = \frac{1}{\beta_N^\alpha} \int \cdots \int_{\delta \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\delta} g(\theta_1, \cdots, \theta_n) |\sigma_N^\alpha(\theta_1) \cdots \sigma_N^\alpha(\theta_n)|^{2n+1}$$
$$\cdot \prod_{j=1}^n \sin^2\theta_j \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\cos\theta_i - \cos\theta_j)^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

由于 $u(U)$ 在 $USp(2n)$ 上连续，对任给的 $\eta > 0$，可选 $\delta > 0$ 充分小，使得当

$$\delta \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\delta$$

时，$|g|\theta_1, \cdots, \theta_n| < \eta$. 由定理 11.2.2，当 $\alpha > \dfrac{2n-2}{2n+1}$ 时，

$$\frac{1}{C} \int_{USp(2n)} |K_N^\alpha(V)| V < M,$$

以至任给 $\varepsilon > 0$，可选 $\delta > 0$，使 $|J_1'| < \varepsilon/2$. 由于 $(2n+1) \cdot \alpha - 2n - 2 > 0$，可选 N 充分大，使

$$|I_2'| + \cdots + |I_{n+1}'| + |J_2'| + \cdots + |J_{n+1}'| < \varepsilon/2.$$

因此，任给 $\varepsilon > 0$，可选 N_0，当 $N \geqslant N_0$ 时，有 $|I| < \varepsilon$，这证明了定理 11.2.1.

§ 11.4 Fejér 求和

当 $\alpha = 1$ 时，即为重要的 Fejér 求和，Fejér 核为

$$\frac{1}{B_N(N+1)^{n(2n+1)}} \left(\frac{\det(I - V^{N+1})}{\det(I - V)} \right)^{2n+1}, \quad (11.4.1)$$

这里

$$B_N = B_N' = \frac{1}{C(N+1)^{n(2n+1)}}$$

$$\cdot \int_{USp(2n)} \left(\frac{\det(I - V^{N+1})}{\det(I - V)} \right)^{2n+1} \dot{V}. \qquad (11.4.2)$$

Fejér 求和的系数为

$$B_{f_1\cdots f_n} = B'_{f_1\cdots f_n} = \frac{2^{-2n}}{B_N N(f)(N+1)^{n(2n+1)} C}$$

$$\cdot \int_{USp(2n)} \chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V}) \left(\frac{\det(I - V^{N+1})}{\det(I - V)} \right)^{2n+1} \dot{V}. \qquad (11.4.3)$$

Fejér 和为

$$\sum_{nN \geqslant f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0} B_{f_1\cdots f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n} \Phi'_{f_1\cdots f_n}(U))$$

$$= \frac{1}{B_N (N+1)^{2(2n+1)}} \int_{USp(2n)} u(VU) \left(\frac{\det(I - V^{N+1})}{\det(I - V)} \right)^{2n+1} \dot{V}.$$

Riesz 型定理 11.2.1 成为 Fejér 型定理：若 $u(U)$ 在 $USp(2n)$ 上连续，那么 $u(U)$ 的 Fourier 级数(10.3.3)可以 Fejér 求和于自己。

如同第二章那样，可以给出 $B_{f_1\cdots f_n}$ 及 B_N 的具体表达式。

由(11.4.3)，易得 $B_{f_1\cdots f_n}$ 等于

$$\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{B_N N(f)(N+1)^{n(2n+1)}} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int \sin l_1\theta_1 \cdots \sin l_n\theta_n$$

$$\cdot \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\cos\theta_i - \cos\theta_j) \left(\frac{1 - \cos(N+1)\theta_1}{1 - \cos\theta_1} \right)^{2n+1}$$

$$\cdots \left(\frac{1 - \cos\theta(N+1)\theta_n}{1 - \cos\theta_n} \right)^{2n+1} d\theta_1 \cdots d\theta_n$$

$$= \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{B_N N(f)(N+1)^{n(2n+1)}} \frac{1}{(2\pi)^n}$$

$$\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int \sin l_1\theta_1 \cdots \sin l_n\theta_n \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_n$$

$$\cdot \left(\frac{1 - \cos(N+1)\theta_1}{1 - \cos\theta_1} \right)^{2n+1} \cdots \left(\frac{1 - \cos(N+1)\theta_n}{1 - \cos\theta_n} \right)^{2n+1}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1, & \cdots, & 1 \\ 1 - \cos\theta_1, & \cdots, & 1 - \cos\theta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (1 - \cos\theta_1)^{n-1}, & \cdots, & (1 - \cos\theta_n)^{n-1} \end{vmatrix} d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

于是 $B_{l_1\cdots l_n}$ 可写为

$$\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{B_N N(f)(N+1)^{n(2n+1)}}\begin{vmatrix} a_{l_1}^0, & a_{l_2}^0, & \cdots, & a_{l_n}^0 \\ a_{l_1}^1, & a_{l_2}^1, & \cdots, & a_{l_n}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l_1}^{n-1}, & a_{l_2}^{n-1}, & \cdots, & a_{l_n}^{n-1} \end{vmatrix}, \quad (11.4.4)$$

这里

$$a_p^q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos\theta)^p \sin q\theta \sin\theta$$

$$\left(\frac{1-\cos(N+1)\theta}{1-\cos\theta}\right)^{2n+1} d\theta.$$

要证明，当 $p=0,1,2,\cdots,n-1$，$q=l_1,l_2,\cdots,l_n$ 时，有

$$a_p^q = (-1)^p 2^{-(p+1)} \sum_{\substack{s=0 \\ k\geq 0 \\ k=N(2n+1)-(N+1)s-q+p}}^{4n+2} (-1)^s$$

$$\cdot \frac{(4n-2p-1+k)!(4n+2)!(4n-2p+2k)}{k!s!(4n-2p)!(4n+2-s)!}. \quad (11.4.5)$$

事实上，a_p^q 可写成

$$(-1)^p 2^{-(p+1)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-e^{i\theta})^{2p-4n-2}(1-e^{i(N+1)\theta})^{4n+2}$$

$$\cdot e^{i(2n+1-p-(N+1)(2n+1))\theta}(e^{i(q-1)\theta}-e^{i(q+1)})de^{i\theta}$$

$$= (-1)^p 2^{-(p+1)}\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}(1-z)^{2p-4n-1}(1-z^{N+1})^{4n+2}$$

$$\cdot z^{q-p-N(2n+1)-2}(1+z)dz,$$

此处 $z=re^{i\theta}$。

由于

$$(1-z)^{-(4n+1-2p)}(1-z^{N+1})^{4n+2}z^{q-p-N(2n+1)-2}(1+z)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{4n+2}(-1)^s\frac{(4n-2p+k)!(4n+2)!}{k!s!(4n-2p)!(4n+2-s)!}$$

$$\cdot z^{k-N(2n+1)+(N+1)s+q-p-2} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{4n+2}(-1)^s$$

$$\cdot \frac{(4n-2p+k)!(4n+2)!}{k!s!(4n-2p)!(4n+2-s)!} z^{k-N(2n+1)+(N+1)s+q-p-1}.$$

代入上式右边，加以整理，即得(11.4.5).

以(11.4.5)代入(11.4.4)，就有：$B_{f_1\cdots f_n}$ 等于

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^{-n}((4n+2)!)^n}{B_N N(f)(N+1)^{n(2n+1)}(4n)!(4n-2)!\cdots(2n+2)!}$$

$$\cdot \det\left(\sum_{\substack{s_j=0\\ k_j\geqslant-(i-1)}}^{4n+2} (-1)^{s_j} \frac{(4n-i+k_j)!(4n+2k_j)}{(k_j+i-1)!s_j!(4n+2-s_j)!}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

这里

$$k_1 = N(2n+1) - l_1 - (N+1)s_1, \cdots,$$

$$k_n = N(2n+1) - l_n - (N+1)s_n;$$

$$l_1 = f_1 + n,\ l_2 = f_2 + n - 1,\ \cdots,\ l_n = f_n + 1.$$

如约定 $\frac{1}{(-m)!} = 0$，当 $m > 0$ 时，就有，$B_{f_1\cdots f_n}$ 等于

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^{-n}((2n+1)!)^n}{B_N N(f)(N+1)^{n(2n+1)}(4n)!(4n-2)!\cdots(2n+2)!}$$

$$\cdot \sum_{\substack{s_1=0\\ k_n\geqslant-(n+1)}}^{4n+2} \cdots \sum_{\substack{s_n=0\\ k_n\geqslant-(n+1)}}^{4n+2} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} C_{s_1}^{4n+2} \cdots C_{s_n}^{4n+2}$$

$$\cdot C_{k_1+n-1}^{3n+k_1} \cdots C_{k_n+n-1}^{3n+k_n} (4n+2k_1)\cdots(4n+2k_n)$$

$$\cdot \det(d_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

这里

$$d_{ij} = (4n-i+k_j)(4n-i-1+k_j)\cdots(3n+k_j+1)$$

$$\cdot (k_j+n-1)(k_j+n-2)\cdots(k_j+i),$$

当 $i = 1,2,\cdots,n-2$ 时；

$$d_{ij} = (3n+k_j+1)(k_j+n-1),\ \text{当}\ i = n-1\ \text{时};$$

$$d_{nj} = 1,\quad \text{当}\ i = n\text{时}.$$

而这又等于

$$\frac{((2n+1)!)^n}{(4n)!(4n-2)!\cdots(2n-2)!B_N N(f)(N+1)^{n(2n+1)}}$$

$$\cdot \sum_{\substack{s_1=0 \\ k_1\geqslant-(n-1)}}^{4n+2} \cdots \sum_{\substack{s_n=0 \\ k_n\geqslant-(n-1)}}^{4n+2} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} C_{s_1}^{4n+2}\cdots C_{s_n}^{4n+2}$$

$$\cdot C_{k_1+n-1}^{3n+k_1}\cdots C_{k_n+n-1}^{3n+k_n} \begin{vmatrix} 2n+k_1, & \cdots, & 2n+k_n \\ (2n+k_1)^3, & \cdots, & (2n+k_n)^3 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (2n+k_1)^{2n-1}, & \cdots, & (2n+k_n)^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

所以，最后得到 $B_{f_1\cdots f_n}$ 等于(贺祖琪，陈广晓[2])

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}((2n+1)!)^n(2n-1)!(2n-3)! - 3!1!}{B_N N(f)(N+1)^{n(2n+1)}(4n)!(4n-2)!\cdots(2n+2)!}$$

$$\cdot \sum_{\substack{s_1=0 \\ k_1\geqslant-(n-1)}}^{4n-2} \cdots \sum_{\substack{s_n=0 \\ k_n\geqslant-(n-1)}}^{4n-2} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} C_{s_1}^{4n+2}\cdots C_{s_n}^{4n+2}$$

$$\cdot C_{k_1+n-1}^{3n+k_1}\cdots C_{k_n+n-1}^{3n+k_n} N(n+N(2n+1)-(N+1)$$

$$\cdot s_1-f_1,\cdots,2n-1+N(2n+1)-(N+1)s_n-f_n),$$

其中

$$k_j = N(2n+1)-(N+1)s_j-(f_j+n-j+1),$$

$$j=1,2,\cdots,n.$$

由于 $B_{0,\cdots,0}=1$，所以 B_N 等于

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}((2n+1)!)^n(2n-1)!(2n-3)!\cdots3!1!}{(N+1)^{n(2n+1)}(4n)!(4n-2)!\cdots(2n+2)!}$$

$$\cdot \sum_{\substack{s_1=0 \\ k_1 \geq -(n-1)}}^{4n+2} \cdots \sum_{\substack{s_n=0 \\ k_n \geq -(n-1)}}^{4n+2} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} C_{s_1}^{4n+2} \cdots C_{s_n}^{4n+2}$$

$$\cdot C_{k_1+n-1}^{3n+k_1} \cdots C_{k_n+n-1}^{3n+k_n} N(n + N(2n+1) - (N+1)$$

$$\cdot s_1, \cdots, 2n - 1 + N(2n+1) - (N+1)s_n).$$

§11.5 用 Cesàro 平均得到的逼近

设 U, V 为 $USp(2n)$ 中二点，

$$U = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2n}, \quad V = (V_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2n},$$

于是 U, V 二点之间的欧氏距离的平方为

$$d^2(U,V) = \sum_{i,j=1}^{2n} |u_{ij} - V_{ij}|^2 = \mathrm{tr}((U-V)(\overline{u-V})')$$

$$= \mathrm{tr}(2I - U\bar{V}' - V\bar{U}').$$

若 $U\bar{V}'$ 的特征根为 $e^{i\theta_1}, e^{-i\theta}, \cdots, e^{i\theta_n}, e^{-i\theta_n}$，那么

$$d^2(U, V) = 4 \sum_{j=1}^{n} (1 - \cos\theta_j).$$

设 $u(U)$ 为 $USp(2n)$ 上连续函数，称

$$w(u, \delta) = \max_{d(U,V) \leq \delta} |u(U) - u(V)|$$

为 $u(U)$ 的连续模.

若 $u(U)$ 在 $USp(2n)$ 上连续，且 $w(u, \delta) = O(\delta^p)$，则称函数 $u(U)$ 满足 Lipschtz 条件，记作 $u(U) \in \mathrm{Lip}\ p$.

如同第四章的办法一样，可以证明(贺祖琪，陈广晓[2])

定理 11.5.1 若 $u(U)$ 是 $USp(2n)$ 上的连续函数，且 $u(U) \in \mathrm{Lip}\ p\ (0 < p < 1)$，则它的 Fourier 级数(10.3.3)的 (c, α) 平均的第 N 项 $\sum_N^\alpha (U)$ 满足

(1) 若 $(2n+1)\alpha - 2n + 2 > p$，则

$$u(U) - \sum_N^\alpha (U) = O(N^{-p});$$

(2) 若 $(2n+1)\alpha-2n+2=p$，则

$$|u(U)-\sum_{N}^{\alpha}(U)=O(N^{-p}\ln N);$$

(3) 若 $(2n+1)\alpha-2n+2<p$，则

$$u(U)-\sum_{N}^{\alpha}(U)=O(N^{2n-2-(2n+1)\alpha}).$$

§11.6 Poisson 核及 Abel 求和

在 §11.3 中所定义的 Cesàro (c,α) 核(11.1.3)，当 α 趋于无穷时，即成为 Poisson 核。

$$P_r(U)=\frac{(1-r^2)^{n(2n+1)}}{\det^{2n+1}(I-rU)} \qquad (11.6.1)$$

这里 $0\leqslant r<1$，$U\in USp(2n)$.

设 U 的特征根为 $e^{\pm i\theta_1},\cdots,e^{\pm i\theta_n}$，那么

$$\det(I-rU)=\prod_{j=1}^{n}(1+r^2-2r\cos\theta_j), \qquad (11.6.2)$$

所以 $P_r(U)$ 是定正的，且

$$P_r(U)=P_r(\overline{U})=P_r(U^{-1}). \qquad (11.6.3)$$

本节主要证明(陈广晓，贺祖琪[3])

定理 11.6.1 若 $u(U)$ 是 $USp(2n)$ 上的连续函数，那么，当 $r\to1$ 时，有

$$\frac{1}{C}\int_{USp(2n)}u(wU)P_r(\overline{w})\dot{w} \qquad (11.6.4)$$

趋于 $u(U)$，这里 $U\in USp(2n)$. C 为 $USp(2n)$ 的体积。

为此，先证以下二个引理

引理 11.6.1 若 $U\in USp(2n)$，H 由(11.1.1)所定义，(显然满足(11.1.2))，那么

$$P_r(\overline{U})\dot{U}=2^{n(2n+1)}\det{}^{-(n+\frac{1}{2})}(I+\tilde{H}^2)\dot{\tilde{H}}, \qquad (11.6.5)$$

这里 $\tilde{H}=\dfrac{1+r}{1-r}H$.

证 要证的是

$$\frac{(1-r^2)^{n(2n+1)}\dot{U}}{(\det(I-rU)\det(I-r\overline{U}'))^{n+\frac{1}{2}}}=2^{n(2n+1)}\cdot\det(I+\hat{H}^2)^{-(n+\frac{1}{2})}\dot{\hat{H}},$$

由于

$$U=(I+iH)(I-iH)^{-1}, \tag{11.6.6}$$

所以

$$I-rU=[(1-r)I-i(1+r)H](I-iH)^{-1},$$
$$I-r\overline{U}'=[(1-r)I+i(1+r)H](I+iH)^{-1};$$

于是

$$\det(I-rU)\det(I-r\overline{U}')$$
$$=\det((1-r^2)I+(1+r)^2H^2)\det(I+H^2)^{-1}.$$

由于

$$\dot{\hat{H}}=\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{n(2n+1)}\dot{H}$$

及第十章的引理 10.1.1，即得(11.6.5).

由引理 11.6.1，立刻可得，当 $0\leqslant r<1$ 时，有

$$\frac{1}{C}\int_{USp(2n)}P_r(\overline{w})\dot{w}=1. \tag{11.6.7}$$

设 $U\in USp(2n)$，则可表为

$$U=V[e^{i\theta_1},e^{-i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n},e^{-i\theta_n}]V^{-1},$$

这里 $V\in USp(2n)$.（11.6.6)中的H成为

$$V\left[\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2},-\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2},\cdots,\operatorname{tg}\frac{\theta_n}{2},-\operatorname{tg}\frac{\theta_n}{2}\right]V^{-1}.$$

如果 $\varepsilon>0$，

$$\operatorname{tr}H\overline{H}'=2\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}^2\frac{\theta_k}{2}<\varepsilon^2, \tag{11.6.8}$$

记为 $H<\varepsilon$，如(11.6.8)不成立，记为 $H\geqslant\varepsilon$，由囊变换(11.6.6)决定的H适合(11.6.8)的 $U\in USp(2n)$ 的全体，组成 $USp(2n)$ 的单位矩阵的一个邻域，记之为 S_ε. 要证

引理 11.6.2 当 $r \to 1$ 时，

$$\int_{USp(2n)\setminus S_\varepsilon} P_r(\overline{U})\dot{U} \tag{11.6.9}$$

趋于零。

证 在(11.6.6)之下，积分(11.6.9)化为

$$\int_{\tilde{H} > \frac{1+r}{1-r}\varepsilon} 2^{2n^2+n} \det{}^{-(n+\frac{1}{2})}(I + \tilde{H}^2)\dot{\tilde{H}},$$

当 $r \to 1$ 时，$\dfrac{1+r}{1-r}\varepsilon \to \infty$，故得引理11.6.2。

定理 11.6.1 的证明：

由(11.6.7)知

$$\frac{1}{C}\int_{USp(2n)} u(wU)P_r(\overline{w})\dot{w} - u(U)$$

$$= \frac{1}{C}\int_{USp(2n)} (u(wU) - u(U))P_r(\overline{w})\dot{w}. \tag{11.6.10}$$

因为 $u(U)$ 是连续函数，给了 $\delta > 0$，存在 $\varepsilon > 0$，使 $w \in S_\varepsilon$ 时，

$$|u(wU) - u(U)| < \delta/2. \tag{11.6.11}$$

将(11.6.10)的右边的积分分成两部分

$$\frac{1}{C}\left(\int_{USp(2n)\setminus S_\varepsilon} + \int_{S_\varepsilon}\right) = I_1 + I_2,$$

由(11.6.11)知

$$|I_2| < \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{C}\int_{S_\varepsilon} P_r(\overline{w})\dot{w} < \delta/2.$$

另一方面，当 $U \in USp(2n)\setminus S_\varepsilon$ 时，可取 r 充分接近 1，使

$$\frac{1}{C}\int_{USp(2n)\setminus S_\varepsilon} P_r(\overline{w})\dot{w} < \frac{\delta}{4M},$$

这里 M 是 $|u(U)|$ 在 $USp(2n)$ 的上界，于是

$$|I_1| < 2M \cdot \frac{\delta}{4M} = \delta/2,$$

于是得到：给了 $\delta > 0$，当 r 充分接近 1 时，

$$\left|\frac{1}{C}\right|\int_{USp(2n)} u(wU)P_r(\overline{w})\dot{w} - u(U)\Bigg| < \varepsilon.$$

定理证完.

在下一节中将证明：$USp(2n)$ 的 Poisson 核可以展开成 $\chi_f(\overline{w})$ 的一致收敛级数，即

$$P_r(\overline{U}) = \sum_{f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0} \rho^f(r) N(f) \chi_f(\overline{U}), \qquad (11.6.12)$$

但 $0 \leqslant r \leqslant r_0 < 1$. 而

$$\rho^f(r) = \frac{1}{N(f)} \frac{1}{C} \int_{USp(2n)} P_r(\overline{w}) \chi_f(w) \dot{w}. \qquad (11.6.13)$$

我们称

$$\sum_{f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0} \rho^f(r) \operatorname{tr}(C_f \Phi_f'(U)) \qquad (11.6.14)$$

为 $u(U)$ 的 Fourier 级数(10.3.3)的 Abel 求和，$\rho^f(r)$ 称为 Abel 求和的系数. 由定理 11.6.1，易见，当 $r \to 1$ 时，

$$\rho^f(r) \to 1.$$

当 $r \to 1$ 时，如果(11.6.14)收敛于 A，则称 $u(w)$ 的 Fourier 级数(10.3.3)可以 Abel 求和于 A.

显然，如果(11.6.12)得证，由定理 11.6.1，可知，$USp(2n)$ 上的任一连续函数可以 Abel 求和于它自己.

§11.7 Poisson 核的展开

本节将沿用钟家庆[2]中的母函数方法，具体算出 Abel 系数，证明了 $USp(2n)$ 上的连续函数可以 Abel 求和它自己.

引理 11.7.1 若 $U \in USp(2n)$，$t_1, \cdots, t_n$ 是 n 个独立实变数，$\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |t_j| \leqslant r < 1$，

$$g_j = \det(I - t_j U) = \prod_{k=1}^{n} (1 + t_j^2 - 2t_j \cos\theta_k), \qquad (11.7.1)$$

那么

$$\frac{\prod\limits_{j<k}^{n}(1-t_jt_k)}{g_1\cdots g_n}=\frac{\sum\limits_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\chi_f+(U)Q^f(t_1,\cdots,t_n)}{\prod\limits_{j<k}^{n}(t_j-t_k)},\qquad(11.7.2)$$

其中 $Q^f(t_1,\cdots,t_n)$ 等于

$$\begin{vmatrix} t_1^{l_1-1}, & \cdots, & t_n^{l_1-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^{l_n-1}, & \cdots, & t_n^{l_n-1} \end{vmatrix}.\qquad(11.7.3)$$

证 若 $e^{\pm i\theta_1},\cdots,e^{\pm i\theta_n}$ 是U的特征根，$N>n$，则

$$\sum_{N\geqslant l_1>\cdots>l_n>0}\begin{vmatrix} \sin l_1\theta_1, & \cdots, & \sin l_n\theta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin l_1\theta_n, & \cdots, & \sin l_n\theta_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} t_1^{l_1-1}, & \cdots, & t_n^{l_1-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^{l_n-1}, & \cdots, & t_n^{l_n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \sum\limits_{m=1}^{N} t_1^{m-1}\sin m\theta_1, & \cdots, & \sum\limits_{m=1}^{N} t_n^{m-1}\sin m\theta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{m=1}^{N} t_1^{m-1}\sin m\theta_n, & \cdots, & \sum\limits_{m=1}^{N} t_n^{m-1}\sin m\theta_n \end{vmatrix},$$

由(11.7.1)，可让 $N\to\infty$，得到

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\chi_f(U)Q_f(t)$$

等于

$$\frac{1}{\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n\prod\limits_{j<k}^{n}(2\cos\theta_j-2\cos\theta_k)}$$

$$
\cdot\begin{vmatrix}
\frac{\sin\theta_1}{1+t_1^2-2t_1\cos\theta_1}, & \cdots, & \frac{\sin\theta_1}{1+t_n^2-2t_n\cos\theta_1} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{\sin\theta_n}{1+t_1^2-2t_1\cos\theta_n}, & \cdots, & \frac{\sin\theta_n}{1+t_n^2-2t_n\cos\theta_n}
\end{vmatrix}.
$$

$$
=\frac{1}{(1+t_1^2)\cdots(1+t_n^2)\prod\limits_{j<k}^{n}(2\cos\theta_j-2\cos\theta_k)}
$$

$$
\cdot\begin{vmatrix}
\frac{1}{1-\frac{2t_1}{1+t_1^2}\cos\theta_1}, & \cdots, & \frac{1}{1-\frac{2t_n}{1+t_n^2}\cos\theta_1} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{1}{1-\frac{2t_1}{1+t_1^2}\cos\theta_n}, & \cdots, & \frac{1}{1-\frac{2t_n}{1+t_n^2}\cos\theta_n}
\end{vmatrix}. \tag{11.7.4}
$$

利用华罗庚[1]中定理 1.1.4，

$$
\begin{vmatrix}
\frac{1}{1-x_1y_1}, & \cdots, & \frac{1}{1-x_ny_1} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{1}{1-x_1y_n}, & \cdots, & \frac{1}{1-x_ny_n}
\end{vmatrix}
=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)D(y_1,\cdots,y_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{k=1}^{n}(1-x_jy_k)},
$$

知道(11.7.4)等于

$$\frac{\prod\limits_{j<k}^{n}\left(\frac{t_j}{1+t_j^2}-\frac{t_k}{1+t_k^2}\right)}{(1+t_1^2)\cdots(1+t_n^2)\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2t_j}{1+t_j^2}\cos\theta_k\right)}$$

$$=\frac{\prod\limits_{j<k}^{n}((t_j-t_k)(1-t_jt_k))}{\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+t_j^2-2t_j\cos\theta_k)}$$

$$=\frac{\prod\limits_{j<k}^{n}((t_j-t_k)(1-t_jt_k))}{g_1\cdots g_n}.$$

即得(11.7.2).

引理 11.7.2 设 $s\geqslant n$, $t_1,\cdots,t_s$ 是 s 个独立实变数，$U\in USp(2n)$,

$$g_j=g(t_j,U)=\det(I-t_jU),$$

$$F_s(t_1,\cdots,t_s)=\prod_{j<k}^{s}((t_j-t_k)(1-t_jt_k)),$$

那么

$$\frac{F_s(t_1,\cdots,t_s)}{g_1\cdots g_s}=\sum_{l_1\geqslant\cdots\geqslant l_n\geqslant 0}\chi_l(U)Q_s^l(t_1,\cdots,t_s), \quad (11.7.5)$$

其中 $Q_s^l(t_1,\cdots,t_s)$ 等于

$$\begin{vmatrix} t_1^{l_1+s-n-1}, & \cdots, & t_1^{l_n+s-n-1}, & t_1^{s-n-1}, & t_1^{s-n-2}T_1, & \cdots, & T_1^{s-n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_s^{l_1+s-n-1}, & \cdots, & t_s^{l_n+s-n-1}, & t_s^{s-n-1}, & t_s^{s-n-2}T_s, & \cdots, & T_s^{s-n-1} \end{vmatrix}, \quad (11.7.6)$$

而 $T_j=1+t_j^2$, $j=1,2,\cdots,s$.

证 用归纳法，当 $s=n$ 时，即为引理 11.7.1. 假定(11.7.5)对于 $s(\geqslant n)$ 成立，来证(11.7.5)对于 $s+1$ 亦成立，即

$$\frac{F_{s+1}(t_1, \cdots, t_{s+1})}{g_1 \cdots g_{s+1}} = \sum_{l_1 > \cdots > l_n > 0} \chi_l(U) Q^l_{s+1}(t_1, \cdots, t_{s+1}), \quad (11.7.7)$$

其中 $Q^l_{s+1}(t_1, \cdots, t_{s+1})$ 等于

$$\begin{vmatrix} t_1^{l_1+s-n}, & \cdots, & t_1^{l_n+s-n}, & t_1^{s-n}, & t_1^{s-n-1}T_1, & \cdots, & T_1^{s-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{s+1}^{l_1+s-n}, & \cdots, & t_{s+1}^{l_n+s-n}, & t_{s+1}^{s-n}, & t_{s+1}^{s-n-1}T_{s+1}, & \cdots, & T_{s+1}^{s-n} \end{vmatrix}.$$

$$(11.7.8)$$

将(11.7.8)按最后一列展开得

$$Q^l_{s+1}(t_1, \cdots, t_{s+1}) = \sum_{j=1}^{s+1} (-1)^{s+1-j} T_j^{s-n} t_1 \cdots \hat{t}_j \cdots t_{s+1} \cdot Q^l_s(t_1, \cdots, \hat{t}_j, \cdots, t_{s+1}).$$

这里 $\hat{t}_j$ 表示 t_j 不出现. 因此, (11.7.7)右边等于

$$\sum_{j=1}^{s+1} (-1)^{s+1-j} T_j^{s-n} t_1 \cdots \hat{t}_j \cdots t_{s+1} \sum_{l_1 > \cdots > l_n > 0} \cdot \chi_l(U) Q^l_s(t_1, \cdots, \hat{t}_j, \cdots, t_{s+1}).$$

由归纳假设, 故(11.7.7)右边等于

$$\sum_{j=1}^{s+1} (-1)^{s+1-j} T_j^{s-n} t_1 \cdots \hat{t}_j \cdots t_{s+1} \frac{g_j}{g_1 \cdots g_{s+1}} \cdot F_s(t_1, \cdots, \hat{t}_j, \cdots, t_{s+1}).$$

由恒等式(钟家庆[2]),

$$F_s(t_1, \cdots, t_s) = \begin{vmatrix} t_1^{s-1}, & t_1^{s-2}T_1, & \cdots, & T_1^{s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_s^{s-1}, & t_s^{s-2}T_s, & \cdots, & T_s^{s-1} \end{vmatrix}, \quad (11.7.9)$$

于是(11.7.7)右边等于

$$\frac{1}{g_1 g_2 \cdots g_{s+1}} \begin{vmatrix} t_1^s, & t_1^{s-1}T_1, & \cdots, & t_1 T_1^{s-1}, & T_1^{s-n}g_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{s+1}^s, & t_{s+1}^{s-1}T_{s+1}, & \cdots, & t_{s+1}T_{s+1}^{s-1}, & T_{s+1}^{s-n}g_{s+1} \end{vmatrix}. \quad (11.7.10)$$

由(11.7.9)得(11.7.7)的左边等于

$$\frac{1}{g_1 g_2\cdots g_{s+1}}\begin{vmatrix} t_1^s, & t_1^{s-1}T_1, & \cdots, & t_1T_1^{s-1}, & T_1^s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{s+1}^s, & t_{s+1}^{s-1}T_{s+1}, & \cdots, & t_{s+1}T_{s+1}^{s-1}, & T_{s+1}^s \end{vmatrix}. \qquad (11.7.11)$$

若能证(11.7.10)与(11.7.11)相等，则引理 11.7.2 得证，由于

$$g_j=\prod_{k=1}^{n}(T_j-2t_j\cos\theta_k)=T_j^n-\cdots,$$

其中未写出的项是 $t_j^mT_j^{n-m}$ $(m=1,2,\cdots,n)$ 的线性组合；因此

$$T_j^s=T_j^{s-n}\cdot T_j^n=T_j^{s-n}(g_j+\cdots)=T_j^{s-n}g_j+\cdots,$$

其中未写出的项是 $t_j^mT_j^{s-m}$ $(m=1,2,\cdots,n)$ 的线性组合，因此(11.7.10)与(11.7.11)相等．证毕．

若令 $s=2n+1$，则

$$\frac{\prod\limits_{j<k}^{2n+1}(1-t_jt_k)}{g_1\cdots g_{2n+1}}=\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\chi_f(U)\frac{Q_{2n+1}^f(t_1,\cdots,t_{2n+1})}{D(t_1,\cdots,t_{2n+1})}, \qquad (11.7.12)$$

其中 $Q_{2n+1}^f(t_1,\cdots,t_{2n+1})$ 等于

$$\begin{vmatrix} t_1^{f_1+2n}, & \cdots, & t_1^{f_n+n+1}, & t_1^n, & t_1^{n-1}T_1, & \cdots, & t_1T_1^{n-1}, & T_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{2n+1}^{f_1+2n}, & \cdots, & t_{2n+1}^{f_n+n+1}, & t_{2n+1}^n, & t_{2n+1}^{n-1}T_{2n+1}, & \cdots, & t_{2n+1}T_{2n+1}^{n-1}, & T_{2n+1}^n \end{vmatrix}. \qquad (11.7.13)$$

(11.7.13)各列的 $T_j^m(1\leqslant m\leqslant n)$ 可用 $1+t_j^{2m}$ 代替而其值不变。由(11.7.1)，在(11.7.12)中，令 $t_j\to r(1\leqslant j\leqslant 2n+1)$，则(11.7.12)的左边为

$$\frac{(1-r^2)^{n(2n+1)}}{\det^{2n+1}(I-rU)}.$$

此即 $USp(2n)$ 的 Poisson 核(11.6.1)；而(11.7.12)的右边变为

$$\sum_{f_1 \geq \cdots \geq f_n \geq 0} \chi_f(U) \lim_{\substack{t_j \to r \\ 1 \leq j \leq 2n+1}} \frac{Q^f_{2n+1}(t_1, \cdots, t_{2n+1})}{D(t_1, \cdots, t_{2n+1})}.$$

这就证明了(11.6.12)，而且

$$N(f)\rho^f(r) = \lim_{\substack{t_j \to r \\ 1 \leq j \leq 2n+1}} \frac{Q^f_{2n+1}(t_1, \cdots, t_{2n+1})}{D(t_1, \cdots, t_{2n+1})}. \tag{11.7.14}$$

若令 $t_j = r\tau_j$，我们有(陈广晓、贺祖琪[3])

定理 11.7.1 $USp(2n)$的 Poisson 核$P_r(U)$有展开式(11.6.12)，且(11.6.13)的 Abel 求和系数 $\rho^f(r)$ 等于

$$\frac{r^{f_1+\cdots+f_n}}{N(f)} \lim_{\substack{\tau_j \to 1 \\ 1 \leq j \leq 2n+1}} \frac{\det(q_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2n+1}}{D(\tau_1, \cdots, \tau_{2n+1})},$$

这里

$$q_{ij} = \tau_i^{f_j+2n+1-j}, \quad 当 \quad j = 1, 2, \cdots, n+1;$$
$$q_{ij} = \tau_i^{2n+1-j}(1 + \tau_i^{2(j-1)-2n}), \quad 当 \quad j = n+2, \cdots, 2n+1. \tag{11.7.15}$$

(11.7.15)中的行列式可写为

$$\sum_{m_1, \cdots, m_n = 0}^{1} r^{2(m_1+2m_2+\cdots+nm_n)}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \tau_1^{f_1+2n}, & \cdots, & \tau_1^{f_n+n+1}, & \tau_1^n, & \tau_1^{n-1+2m_1}, & \cdots, & \tau_1^{1+2(n-1)m_{n-1}}, & \tau_1^{0+2nm_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{2n+1}^{f_1+2n}, & \cdots, & \tau_{2n+1}^{f_n+n+1}, & \tau_{2n+1}^n, & \tau_{2n+1}^{n-1+2m_1}, & \cdots, & \tau_{2n+1}^{1+2(n-1)m_{n-1}}, & \tau_{2n+1}^{0+2nm_n} \end{vmatrix}.$$

用 $M(f_1, \cdots, f_n, P_0, P_1, \cdots, P_n)$ 表示

$$\lim_{\substack{\tau_j \to 1 \\ 1 \leq j \leq 2n+1}} \frac{\begin{vmatrix} \tau_1^{f_1+2n+1}, & \cdots, & \tau^{f_n+n+2}, & \tau_1^{p_0+n+1}, & \cdots, & \tau^{p_n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{2n+1}^{f_1+2n+1}, & \cdots, & \tau_{2n+1}^{f_n+n+1}, & \tau_{2n+1}^{p_0+n+1}, & \cdots, & \tau_{2n+1}^{p_0+1} \end{vmatrix}}{\tau_1 \cdots \tau_{2n+1} D(\tau_1^2, \tau_2^2, \cdots, \tau_{2n+1}^2)}.$$

由此又得

定理 11.7.2 $USp(2n)$ 上任一连续函数 $u(U)$ 可以 Abel 求和于它自己，且(11.6.13)中的 Abel 求和系数 $\rho^f(r)$ 等于

$$\frac{2^{n(3n+1)}}{N(f)}\sum_{(m_1,\cdots,m_n)\in E} r^{f_1+\cdots+f_n+2(m_1+2m_2+\cdots+nm_n)}$$

$$\cdot M(f_1,\cdots,f_n,0,2m_1,4m_2,\cdots,2nm_n),$$

其中指标集 E 满足下列条件:

1° $0\leqslant m_j\leqslant 1$, $j=1,\cdots,n$;

2° 对任一对 (j,k), $1\leqslant j$, $k\leqslant n$, $f_k+2n+1-k$ 与 $n-j+2jm_j$ 都不相同.

利用华罗庚恒等式([1], 14 页, 定理 1.2.4):

$$\lim_{\substack{x_1\to x\\ \cdots\\ x_n\to x}}\frac{\begin{vmatrix} f_1(x_1), & \cdots, & f_n(x_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_1(x_n), & \cdots, & f_n(x_n)\end{vmatrix}}{D(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!2!\cdots(n-1)!}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} f_1(x), & \cdots, & f_n(x)\\ f_1'(x), & \cdots, & f_n'(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_1^{(n-1)}(x), & \cdots, & f_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}.$$

又得

定理 11.7.3 $\rho^f(r)$ 等于

$$\frac{(-1)^n}{N(f)!2!\cdots(2n)!}\begin{vmatrix} \xi_1(r), & \cdots, & \xi_{2n+1}(r)\\ \xi_1'(r), & \cdots, & \xi_{2n+1}'(r)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi_1^{(2n)}(r), & \cdots, & \xi_{2n+1}^{(2n)}(r)\end{vmatrix},$$

这里

$$\xi_1(r)=r^{f_1+2n},\cdots,\xi_n(r)=r^{f_n+n+1},\xi_{n+1}(r)=r^n;$$

$$\xi_{n+2}(r)=r^{n-1}+r^{n+1},\xi_{n+3}(r)=r^{n-2}+r^{n+2},\cdots,$$

$$\xi_{2n+1}(r)=1+r^{2n}.$$

第十二章　酉辛群上的 Fourier 级数的球求和

§12.1　球求和的积分表达式

如同第五章那样，我们不仅可以考虑酉辛群上的 Fourier 级数的"方体"求和，也可以考虑在 $USp(2n)$ 上可积函数 $u(U)$ 的 Fourier 级数(10.3.3)的球求和，此时，把(10.3.3)考虑为

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0 \\ l_1^2+\cdots+l_n^2=m}} \operatorname{tr}(C_f \Phi_f'(U)). \tag{12.1.1}$$

设 $\varphi(t)$ 是定义在 $0 \leqslant t < \infty$ 上的一个固定函数，满足 $\varphi(0)=1$，所谓在 φ 意义下的球求和，乃是考虑

$$\sum_{m=0}^{\infty} \phi\left(\frac{\sqrt{m}}{R}\right) \sum_{\substack{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0 \\ l_1^2+\cdots+l_n^2=m}} \operatorname{tr}(C_f \Phi_f'(U)) \tag{12.1.2}$$

当 $R \to \infty$ 时的极限，这里

$$\phi(t) = \phi_R(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi\left(\frac{\sqrt{m_0}}{R}\right)}, \quad m_0 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

记

$$s_R^{\varphi}(r, U) = \sum_{\substack{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0 \\ m=l_1^2+\cdots+l_n^2}} \phi\left(\frac{\sqrt{m}}{R}\right) r^{l_1+\cdots+l_n} \operatorname{tr}(C_f \Phi_f'(U)). \tag{12.1.3}$$

由(10.3.4)，$s_R^{\varphi}(r, U)$ 可以写成

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{USp(2n)} u(wU) F_R(r, \bar{w}) \dot{w}. \tag{12.1.4}$$

此处

$$F_R(r,\bar{w})=\sum_{\substack{l_1>\cdots>l_n\geq 1\\ m=l_1^2+\cdots+l_n^2}}\phi\left(\frac{\sqrt{m}}{R}\right)r^{l_1+\cdots+l_n}N(f)\chi_f(\bar{w}),\tag{12.1.5}$$

ω_n 为 $USp(2n)$ 的体积.

设 $\bar{w}$ 的特征根为 $e^{\pm i\theta_j}(1\leqslant j\leqslant n)$. 要证

$$\sum_{l_1>\cdots>l_n\geq 1}r^{l_1+\cdots+l_n}N(f)\chi_f(\bar{w})=\frac{1}{i^n(2n-1)!\cdots3!1!}\cdot\det(P_r^{(2j-1)}(\theta_k))_{1\leqslant j,k\leqslant n},\tag{12.1.6}$$

此处 $P_r(\theta)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$.

事实上，由于

$$\frac{1}{2}P_r^{(2j-1)}(\theta)=(-1)^{j+1}\sum_{l=1}^{\infty}r^l l^{2j-1}\sin l\theta,$$

将 $\det(P_r^{(2j-1)}(\theta_k))_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ 进行 Laplace 展开，得到

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{l_1>\cdots>l_n\geq 1}2^n\begin{vmatrix}l_1r^{l_1}, & \cdots, & l_nr^{l_n}\\ l_1^3r^{l_1}, & \cdots, & l_n^3r^{l_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ l_1^{2n-1}r^{l_1}, & \cdots, & l_n^{2n-1}r^{l_n}\end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\sin l_1\theta_1, & \cdots, & \sin l_1\theta_n\\ \sin l_2\theta_1, & \cdots, & \sin l_2\theta_2\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin l_n\theta_1, & \cdots, & \sin l_n\theta_n\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\sum_{l_1>\cdots>l_n\geq 1}\frac{2^n r^{l_1+\cdots+l_n}\prod_{j=1}^{n}l_j\prod_{j>k}(l_j^2-l_k^2)}{(2i)^n}s_\theta(l_1,\cdots,l_n)$$

$$=i^n\sum_{l_1>\cdots>l_n\geq 1}r^{l_1+\cdots+l_n}N(f)(2n-1)!\cdots3!1!s_\theta(l_1,\cdots,l_n),$$

除以 $i^n(2n-1)!\cdots3!1!s(n,\cdots,2,1)$，即得(12.1.6). 若(12.1.6)的右边乘以 $s_\theta(n,\cdots,2,1)$，记作 $g(\theta_1,\cdots,\theta_n)$，其

Fourier 级数为

$$\sum_{\infty>\nu_1,\cdots,\nu_n>-\infty} a_{\nu_1,\cdots,\nu_n} e^{i(\nu_1\theta_1+\cdots+\nu_n\theta_n)}. \tag{12.1.7}$$

由 Bochner [1]，如果 $\varphi(s)$ 在每个有限区间都绝对连续，且

$$\int_0^\infty |\varphi(s)| s^{\frac{n-1}{2}} ds < \infty, \tag{12.1.8}$$

则有

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m=\nu_1^2+\cdots+\nu_n^2} \phi\left(\frac{\sqrt{m}}{R}\right) a_{\nu_1\cdots\nu_n} e^{i(\nu_1\theta_1+\cdots+\nu_n\theta_n)}$$

$$= R\int_0^\infty g_\theta(t) H_\phi(tR) dt, \tag{12.1.9}$$

这里

$$g_\theta(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_\sigma g(\theta_1 + t\eta_1, \cdots, \theta_n + t\eta_n) d\sigma_\eta, \tag{12.1.10}$$

$$H_\varphi(tR) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \phi(u)(utR)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(utR) du. \tag{12.1.11}$$

而 $J_\mu(s)$ 是第一类 μ 阶 Bessel 函数，σ 表示球面 $\eta_1^2+\cdots+\eta_n^2=1$，$d\sigma_\eta$ 表示球面的体积元素.

但是(12.1.9)的左边就是

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m=l_1^2+\cdots+l_n^2} \phi\left(\frac{\sqrt{m}}{R}\right) r^{l_1+\cdots+l_n} N(f) s_\theta(l_1,\cdots,l_n).$$

所以

$$F_R(r,\overline{w}) = \frac{R}{s_\theta(n,\cdots,2,1)} \int_0^\infty g_0(t) H_\phi(tR) dt$$

$$= \frac{R\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}} s_\theta(n,\cdots,2,1)} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int g(\theta+\xi)$$

$$\cdot \frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}} d\xi_1\cdots d\xi_n, \tag{12.1.12}$$

这里 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$|\xi|=(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

由(12.1.6)，将 $g(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 的值代入(12.1.12)，把行列式展开，并假定，当 $1\leqslant\alpha_1,\cdots,\alpha_n\leqslant 2n-1$ 时，

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)^{\alpha_n}\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}}\Bigg|_{|\xi|=\infty}=0, \tag{12.1.13}$$

进行分部积分，则得

$$F_R(r,\bar{w})=\frac{(-i)^n}{D(n,\cdots,2,1)s(n,\cdots,2,1)}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int P_r(\theta_1+\xi_1)\cdots P_r(\theta_n+\xi_n)\,Q\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)$$

$$\cdot\frac{H_\phi(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}}d\xi_1\cdots d\xi_n, \tag{12.1.14}$$

这里

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)=(-1)^{n^2}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial\xi_1}, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial\xi_n}\\ \left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^3, & \cdots, & \left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)^3\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{2n-1}, & \cdots, & \left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)^{2n-1}\end{vmatrix}.$$

引理 12.1.1 设 $f(\xi)$ 是 n^2 次连续可微的实函数 $(\xi>0)$，那么

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)f\left(\frac{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}{2}\right)$$

$$=f^{(n^2)}\left(\frac{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}{2}\right)Q(\xi_1,\cdots,\xi_n). \tag{12.1.15}$$

证 由于

$$\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^1\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)^3\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)^{2n-1}f\left(\frac{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}{2}\right)$$

$$=f^{(n^2)}\left(\frac{|\xi|^2}{2}\right)\xi_1\xi_2^3\cdots\xi_n^{2n-1}+\cdots \tag{12.1.16}$$

省略号中包含的项可写成

$$c_{i_1\cdots i_n}f^{(2(i_1+\cdots+i_n)-n)}\left(\frac{|\xi|^2}{2}\right)\xi_1^{2i_1-1}\cdots\xi_n^{2i_n-1}$$

的形式，这里常数 $c_{i_1\cdots i_n}$ 仅与 $i_1,\cdots,i_n$ 有关，而 $i_1=1,i_2\leqslant 2,\cdots,i_n\leqslant n$，并且至少有一个不等号成立．故 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中必有相同者．故将(12.1.16)代入到(12.1.15)左边后，省略号中包含的项组成值为零的行列式，而写出的项恰组成(12.1.15)的右边．证毕．

由引理 12.1.1 得到

$$F_R(r,\bar{w})=\frac{(-i)^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{D(n,\cdots,1)s(n,\cdots,1)2\pi^{\frac{n}{2}}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int P_r(\theta_1+\xi_1)\cdots P_r(\theta_n+\xi_n)\left[\left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^{n^2}\frac{H_\Phi(\xi R)}{\xi^{n-1}}\right]_{\xi=|\xi|}$$

$$\cdot Q(\xi_1,\cdots,\xi_n)d\xi_1\cdots d\xi_n. \tag{12.1.17}$$

如果将 $\bar{w}$ 分解为

$$\bar{w}=P\Lambda P^{-1},\qquad P\in USp(2n),$$

$$\Lambda=[e^{i\theta_1},e^{-i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n},e^{-i\theta_n}].$$

把 Λ 的对角线上元素 $[e^{i\theta_j},e^{-i\theta_j}]$ 分成一组，组与组之间进行置换，在一些 $[e^{i\theta_j},e^{-i\theta_j}]$ 中 $e^{i\theta_j}$ 与 $e^{-i\theta_j}$ 互换，所有这些置换 σ 都可以通过 $USp(2n)$ 中的方阵进行相似变换，这样得到的对角阵记为 Λ_σ，而命

$$\bar{w}_\sigma=P\Lambda_\sigma P^{-1}.$$

作出所有可能的 $\bar{w}_\sigma$，共有 $2^n\cdot n!$ 个，把所有的 $u(w_\sigma U)$ 相加，除以 $2^n\cdot n!$，记作 $u^*(wU)$，于是

$$\phi_U(\theta_1,\cdots,\theta_n)=\frac{1}{\omega_n'}\int_{[USp(2n)]}u^*(wU)[\dot{w}] \tag{12.1.18}$$

是 $\theta_1, \cdots, \theta_n$ 的对称偶函数，由(12.1.4)，有

$$s_R^{\alpha}(r,U)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_n>0}\phi_U(\theta)F_R(r,\overline{w})\cdot|s_\theta(n,\cdots,1)|^2 d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

将(12.1.17)代入上式，由 Fubini 定理得到

$$s_R^{\alpha}(r,U)=\frac{(-i)^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)R}{D(n,\cdots,2,1)\pi^{\frac{n}{2}}\cdot 2}\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\int\cdots\int_{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_n>0}\phi_U(\theta_1,\cdots,\theta_n)\overline{s_\theta(n,\cdots,2,1)}$$

$$\cdot P_r(\theta_1+\xi_1)\cdots P_r(\theta_n+\xi_n)Q(\xi_1,\cdots,\xi_n)\left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^{n^2}\cdot\frac{H_\phi(\xi R)}{\xi^{n-1}}\Bigg|_{\xi=|\xi|}d\xi_1\cdots d\xi_n d\theta_1\cdots d\theta_n. \qquad (12.1.19)$$

上式右边等于

$$\frac{(-i)^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)R}{D(n,\cdots,2,1)\pi^{\frac{n}{2}}\cdot 2(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\frac{1}{2^n n!}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int\cdot\phi_U(\theta_1,\cdots,\theta_n)$$

$$\overline{s_\theta(n,\cdots,2,1)}\prod_{j=1}^{n}P_r(\theta_j+\xi_j)$$

$$\cdot Q(\xi_1,\cdots,\xi_n)\left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^{n^2}\frac{H_\phi(\xi R)}{\xi^{n-1}}\Bigg|_{\xi=|\xi|}d\xi_1\cdots d\xi_n d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

让 $r\to 1$，由 Lebesgue 从属定理及 Zygmund 关于多重 Fourier 级数的 Abel 求和定理 (Zygmund [1])，$s_R^{\alpha}(U)$ 等于

$$\frac{(-i)^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)R}{D(n,\cdots,2,1)2\cdot\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{2^n n!}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\phi_U(-\xi)s_\xi(n,\cdots,2,1)$$

$$\cdot Q(\xi_1,\cdots,\xi_n)\left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^{n^2}\frac{H_\gamma(\xi R)}{\xi^{n-1}}\Bigg|_{\xi=|\xi|}d\xi_1\cdots d\xi_n$$

$$= \frac{(-i)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) R}{D(n, \cdots, 2, 1) 2\pi^{\frac{n}{2}}} \int \cdots \int_{\infty > \xi_1 > \cdots > \xi_n > 0} \phi_U(-\xi) s_\xi(n, \cdots, 2, 1)$$

$$\cdot Q(\xi_1, \cdots, \xi_n) \left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^{n^2} \frac{H_\varphi(\xi R)}{\xi^{n-1}} \Bigg|_{\xi = |\xi|} d\xi_1 \cdots d\xi_n. \tag{12.1.20}$$

于是得到(陈广晓,贺祖琪[4])

定理 12.1.1 若 $u(U)$ 在 $USp(2n)$ 上可积，那么它的 Fourier 级数(12.1.1)按 φ 意义下的球平均(12.1.2)可以表为(12.1.20)的右边. 其中 $\phi_U(\xi)$ 由(12.1.18)给出，但 $\varphi(t)$ 必须满足(12.1.8)及(12.1.13)，并且在每一个有限区间绝对连续，$\frac{H_\varphi(\xi R)}{\xi^{n-1}}$ 对 ξ 连续可微 n^2 次.

由 Chandrasekharan-Minakshisundaran [1]，$s_R^\varphi(U)$ 还可表为

$$\frac{(-i)^n R}{D(n, \cdots, 2, 1) 2^n n!} \int_0^\infty h_U(t) t^{n-1} dt, \tag{12.1.21}$$

这里

$$h_U(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_\sigma s_{t\eta}(n, \cdots, 2, 1) \phi_U(t\eta) Q(t\eta)$$

$$\cdot \left(\frac{d}{tdt}\right)^{n^2} \frac{H_\varphi(tR)}{t^{n-1}} d\sigma\eta, \tag{12.1.22}$$

这里 $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$.

由于 $Q(t\eta) = t^{n^2} Q(\eta)$，若令 $Rt = u$，则 $s_R^\varphi(U)$ 还可表为

$$\frac{(-i)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) R^{n^2}}{D(n, \cdots, 2, 1) 2^n n! 2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \left(\int_\sigma s_{\frac{u\eta}{R}}(n, \cdots, 2, 1) \phi_U\left(\frac{u}{R}\eta\right)\right.$$

$$\left.\cdot Q(\eta) d\sigma\eta\right) u^{n^2+n-1} \left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2} \left(\frac{H_\varphi(u)}{u^{n-1}}\right) du. \tag{12.1.23}$$

容易证明：特别取 $u(U)=1$ 时，当 $R\geqslant m_0$ 时，$s_R^\varphi(U)=1$。所以当 $R\geqslant m_0$ 时，对可积函数 $u(U)$ 与它的球平均 $s_R^\varphi(U)$ 之差 $u(U)-s_R^\varphi(U)$ 可表为

$$\frac{(-i)^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)R}{D(n,\cdots,2,1)2\cdot\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\infty>\xi_1>\cdots>\xi_n>0}\cdots\int\psi_U^*(-\xi)s_\xi(n,\cdots,2,1)$$

$$\cdot Q(\xi_1,\cdots,\xi_n)\left(\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^{n^2}\frac{H_\phi(\xi R)}{\xi^{n-1}}\Bigg|_{\xi=|\xi|}d\xi_1\cdots d\xi_n,$$

(12.1.24)

这里

$$\psi_U^*(\xi)=\frac{1}{\omega_n'}\int_{(USp(2n))}(u(U)-u^*(wU))[\dot w].\quad(12.1.25)$$

§12.2 一条一般收敛定理

$u(U)-s_R^\varphi(U)$ 还可表为

$$\frac{(-i)^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)R^{n^2}}{D(n,\cdots,1)2^nn!2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty u^{n^2+n-1}\left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2}\frac{H_\varphi(u)}{u^{n-1}}du$$

$$\cdot\int_\sigma s_{\frac{u}{R}\eta}(n,\cdots,1)\,\psi_U^*\left(\frac{u}{R}\eta\right)Q(\eta_1,\cdots,\eta_n)d\sigma\eta\quad(12.2.1)$$

这里 ψ_U^* 由(12.1.25)所定义。

假设当 $R\to\infty$ 时，

$$u^{n^2+n-1}\left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2}\left(\frac{H_\varphi(u)}{u^{n-1}}\right)=O(u^{-n^2-1-p}),p>0,\quad(12.2.2)$$

将(12.2.1)分成二部分

$$\frac{(-i)^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)R^{n^2}}{D(n,\cdots,1)2^nn!2\cdot\pi^{\frac{n}{2}}}\left(\int_0^{M(R)}+\int_{M(R)}^\infty\right)du=I_1+I_2.$$

取 $M(R)$，使得

$$R^{n^2}/M(R)^{n^2+p}=o(1),\quad M(R)/R=o(1),\quad(12.2.3)$$

这样的 $M(R)$ 是可以取到的，例如取 $M(R)=R^{1-p/2n^2}$. 由于

$$\int_\sigma s_{\frac{u}{R}\eta}(n,\cdots,1)\psi_U^*\left(\frac{u}{R}\eta\right)Q(\eta_1,\cdots,\eta_n)d\sigma\eta = O(1),$$

故

$$|I_2| = O\left(\int_{M(R)}^\infty R^{n^2}u^{-n^2-1-p}du\right) = O(R^{n^2}/(M(R))^{n^2+p}).$$

由(12.2.3)得 $I_2 = o(1)$.

由 φ 的条件，$\left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2}\left(\frac{H_\varphi(u)}{u^{n-1}}\right)$ 在 $u=0$ 连续，而

$$s_{\frac{u}{R}\eta}(n,\cdots,1) = O\left(\frac{u^{n^2}}{R^{n^2}}\right),$$

由于 $u(U)$ 是连续函数，因此 $\psi_U^*\left(\frac{u}{R}\eta\right)=o(1)$. 这就得到

$$|I_1| = o\left(\int_0^{M(R)}\left|u^{n^2}u^{n^2+n-1}\left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2}\frac{H_\varphi(u)}{u^{n-1}}\right|du\right). \qquad (12.2.4)$$

由(12.2.2)得到

$$\int_0^\infty\left|u^{n^2}u^{n^2+n-1}\left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2}\frac{H_\varphi(u)}{u^{n-1}}\right|du$$

绝对可积，而由(12.2.4)，$|I_1| = o(1)$.

于是得到

定理 12.2.1 若 $u(U)$ 在 $USp(2n)$ 上连续，它的 Fourier 级数在 φ 意义下的球平均(12.1.2)，记作 $s_R^\varphi(U)$，在下列条件下，当 $R\to\infty$ 时，$s_R^\varphi(U)$ 收敛于 $u(U)$:

(i) $\varphi(t)$ 在任何有限区间绝对连续，且满足

$$\int_0^\infty|\varphi(t)|\,t^{\frac{n-1}{2}}dt<\infty; \qquad (12.2.5)$$

(ii) 由 $\varphi(t)$ 决定的 H_φ (12.1.11)满足

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)^{j_n}\left(\frac{H_\varphi(|\xi|R)}{|\xi|^{n-1}}\right)\Bigg|_{|\xi|=\infty}=0, \qquad (12.2.6)$$

当 $1\leqslant j_1,\cdots,j_n\leqslant 2n-1$; 及当 $u\to\infty$ 时

$$\left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2}\left(\frac{H_\varphi(u)}{u^{n-1}}\right)=O\left(u^{-(2n^2+n+p)}\right)。\qquad(12.2.7)$$

而 $p>0$。

由于 $I_2=O(1)$ 的证明未用到 $u(U)$ 的其它性质，因此 Fourier 级数按 φ 意义球求和是"局部"性质。

§ 12.3 三种球求和及收敛性定理的证明

如同第五章那样，我们还是考虑这三种求和法，即：δ 次 Riesz 求和，Gauss-Sommerfeld 求和及 Abel 求和。

1) δ 次 Riesz 求和，这时

$$\varphi(t)=\begin{cases}(1-t^2)^\delta, & 当\ 0\leqslant t<1;\\ 0, & 当\ t\geqslant 1.\end{cases}$$

这时候，当 $R^2\geqslant m_0$ 时

$$H_\phi=H_R^\varphi(u)=\frac{2^{\delta-\frac{n}{2}+1}\Gamma(\delta+1)}{\left(1-\frac{m_0}{R^2}\right)^\delta\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}u^{n-1}V_{\delta+\frac{n}{2}}(u),$$

这里 $V_s(u)=J_s(u)/u^s$，而 J_s 为第一类 s 阶 Bessel 函数，于是

$$\left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2}\left(\frac{H_\phi(u)}{u^{n-1}}\right)=\left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2}V_{\delta+\frac{n}{2}}(u)$$

$$\cdot\frac{2^{\delta-\frac{n}{2}+1}\Gamma(\delta+1)}{\left(1-\frac{m_0}{R^2}\right)^\delta\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{(-1)^{n^2}2^{\delta-\frac{n}{2}+1}\Gamma(\delta+1)}{\left(1-\frac{m_0}{R^2}\right)^\delta\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\cdot V_{\delta+\frac{n}{2}+n^2}(u)=O\left(u^{-\delta-\frac{n+1}{2}-n^2}\right).$$

当 $\delta>n^2+\dfrac{n-1}{2}$ 时，取 $p=\delta-n^2-\dfrac{n-1}{2}$，则

$$\left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2}\left(\frac{H_\phi(u)}{u^{n-1}}\right)=O\left(u^{-(2n^2+n+p)}\right).$$

于是定理 12.2.1 中的条件(12.2.7)满足，而条件(12.2.5)及(12.2.6)

是显然满足的.

2) Gauss-Sommerfeld 求和，这时 $\varphi(t)=e^{-t^2}$，当 $R^2\geqslant m_0$ 时

$$H_\phi=H_R^\varphi(u)=\frac{e^{m_0/R^2}u^{n-1}e^{-\frac{1}{4}u^2}}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

而

$$\left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2}\left(\frac{H_\phi(u)}{u^{n-1}}\right)=\frac{e^{m_0/R^2}}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2}e^{-\frac{1}{4}u^2}$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n^2}e^{m_0/R^2}}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-\frac{1}{4}u^2}=O(u^{-(2n^2+n+p)}),$$

对任意 $p>0$ 都成立。

于是定理 12.2.1 中的条件(12.2.7)满足，同样可以验证条件(12.2.5)及(12.2.6)是显然满足的.

3) Abel 求和，这时 $\varphi(t)=e^{-t}$，当 $R^2\geqslant m_0$ 时，

$$H_\phi=H_R^\varphi(u)=\frac{e^{\frac{\sqrt{m_0}}{R}}(n-1)!}{2^{n-2}\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2}\cdot\frac{u^{n-1}}{(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

而

$$\left(\frac{d}{udu}\right)^{n^2}\left(\frac{H_\phi(u)}{u^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{e^{\frac{\sqrt{m_0}}{R}}(n-1)!(-1)^{n^2}(n+1)(n+3)\cdots(2n^2+n-1)}{2^{n-2}\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2}$$

$$\cdot(1+u^2)^{-\left(\frac{n+1}{2}+n^2\right)}=O(u^{-(2n^2+n+1)}).$$

所以定理 12.2.1 中的条件(12.2.7)满足，而条件(12.2.5)及(12.2.6)是显然满足的。

最后得到。

定理 12.3.1 若 $u(U)$ 在 $USp(2n)$ 上连续，则它的 Fourier 级数(10.3.3)可以 Abel, Gauss-Sommerfeld，δ 次 Riesz 求和它自己，但 $\delta > \frac{2n^2+n-1}{2}$。

第十三章 四元数体上的典型域的调和分析

§ 13.1 引言

在本书的第一部分中，论讨酉群上的调和分析时，重要的出发点之一，是把酉群 $U_n = U(n, \mathrm{C})$ 看成为多复变数第一类典型域

$$\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_1(n, \mathrm{C}) = \{Z \mid I - Z\bar{Z}' > 0, Z \text{ 为 } n \times n \text{ 复元素方阵}\}$$

的特征流形，. 从 $\mathscr{R}_1(n, \mathrm{C})$ 的 Poisson-华核 $P_1(Z, U)$ 出发，华罗庚[2]得到了 $U(n, \mathrm{C})$ 上的 Fourier 级数的 Abel 求和。

在本书的第二部分中，讨论旋转群上的调和分析时，也是按照上述华罗庚的观点进行的. 把正交群 $O(n)$ 看成为实变数第一类典型域 $\mathscr{R}_1(n, \mathrm{R}) = \{X \mid I - XX > 0, X \text{ 为 } n \times n \text{ 实元素方阵}\}$ 的特征流形，从 $\mathscr{R}_1(n, \mathrm{R})$ 的 Porsson 核 $P_1(x, \Gamma)$ 出发，也同样可以得到 $SO(n)$ 上的 Fourier 级数的 Abel 求和(陆启铿[1]，钟家庆[2])。这也成为旋转群上调和分析的出发点之一。

在本书的第三部分中，我们在前几章中已经建立起了酉辛群 $USp(2n)$ 上的调和分析，但还未用到上述的观点，我们得到 $USp(2n)$ 上的 Fourier 级数的 Abel 求和所对应的 Poisson 核，是从 $USp(2n)$ 的 Fourier 级数的 Cesàro (c, α) 求和所对应的 Cesàro (c, α) 核出发，让 $\alpha \to \infty$ 得到的核.

是不是也可以像第一、第二部分那样，可以找到一个有界的域，它的特征流形就是酉辛群 $USp(2n)$ 呢？华罗庚早就指出：$USp(2n)$ 实际上是四元数体上的酉群，并可看作第一类典型域

$$R_1(Q) = \{Z = (z_{st}) : I - Z\bar{Z}' > 0 \quad z_{st} \text{ 为四元数}\}$$

的特征流形. 由此出发，我们也可以通过建立起 $R_1(Q)$ 的调和分析，求得 $USp(2n)$ 的 Poisson 核，这个核与第十一章中得到的 Poisson 核是完全一致的.

这一章的内容就是讨论四元数体上的第一类典型域的调和函数论．这项工作是由陈广晓完成的(见陈广晓[2])．

孙继广[1]曾讨论了四元数体上的典型域 $R_{III}(Q)$ 的调和函数论，同时证明了，四元数体上的三类典型域 $R_I(Q)$，$R_{II}(Q)$，$R_{III}(Q)$ 分别是 É. Cartan 的不可约大范围黎曼对称空间分类表(参阅 S. Helgason [1])中 $s_p(m,n)/s_p(m)\times s_p(n)$，$SU^*(2n)/s_p(n)$，和 $s_p(n,\mathrm{C})/s_p(n)$ 的等价矩阵表示．因此我们将要讨论的 $R_I(Q)$ 是不可约的域．

§13.2 四元数体 Q 上的方阵典型域

令 Q 为实数域 R 上的四元数体，元素 $\bar{q}=a-ib-jx-ky$ 称为元素 $q=a+ib+jx+ky$ 的共轭元素．$|q|=\sqrt{q\bar{q}}$ 称为 q 的绝对值，$a=\frac{1}{2}(q+\bar{q})$ 称为 q 的实部，记为 $\mathrm{Re}q$，用 Q^* 表示体 Q 的乘法子群．容易证明，全体绝对值为 1 的四元数组成 Q^* 的换位子群 C，$Q^*/C\simeq\mathrm{R}^+$，而 $q\to|q|$ 为自然同构．在华罗庚、万哲先[1]中建立了一般体上的行列式理论，把它应用到 Q 上，可得 Q 上的 n 阶方阵 A 的行列式的如下性质：

I. 交换 A 的两行(列)，行列式 $\det A$ 不变；

II. 将 A 的某一行(列)，左(右)乘 Q^* 中的元素 q，则 $\det A$ 变成 $|q|\det A$；

III. 将 A 的某一行(列)加上另一行(列)的一个左(右)倍数，则 $\det A$ 不变．

由于 Q 的二阶方阵表示

$$\tau:\ a+ib+jx+ky\to\begin{pmatrix}a+ib, & x+iy\\ -x+iy, & a-ib\end{pmatrix}\in M(2,\mathrm{C}),\tag{13.2.1}$$

诱导出从环 $M(n,Q)$ 到 $M(2n,\mathrm{C})$ 中的(忠实)表示

$$\tau:(q_{jk})_{1\le j,k\le n}\to(\tau(q_{jk}))_{1\le j,k\le n}.\tag{13.2.2}$$

容易验证

$$\det A = \sqrt{\det \tau(A)}. \qquad (13.2.3)$$

定义 适合

$$\bar{U}U' = I \qquad (13.2.4)$$

的 n 阶方阵称为酉方阵，适合

$$\bar{H}' = H \qquad (13.2.5)$$

的 n 阶方阵称为 Hermite 方阵，显然 τ 把酉群 $U(n,Q)$ 忠实地表示为 $2n$ 阶酉辛群 $USp(2n)$，而把 H 映为适合

$$\tau(H)\cdot J_n = J_n \cdot \overline{\tau(H)}, \left(J_n = I^{(n)} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

的 $2n$ 阶 Hermite（复）方阵，用 $R_1(n,Q)$ 表示

$$\{Z \in M(n,Q): I - Z\bar{Z}' > 0\}. \qquad (13.2.6)$$

即 Q 上的第一类方阵典型域。如果 H 为 Hermite 阵，$H > 0$ 表示 $\tau(H) > 0$。

定理 13.2.1 设 $z \in R_1(n,Q)$，那么存在 $U, V \in U(n,Q)$，使

$$UzV^{-1} = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n], \qquad (13.2.7)$$

其中 $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n < 1$.

证 设 $Y = Z\bar{Z}$，假定 Z 非异，则 $Y > 0$. 设 λ_1^2 为 $\tau(Y)$ 的最小特征根，由(13.2.3)知

$$\det(Y - \lambda_1^2 I) = 0.$$

由华罗庚、万哲先[1]第三章 §7 知，方程

$$(Y - \lambda_1^2 I)e = 0, \qquad |e| = 1$$

有解，(列向量 $(q_1, \cdots, q_n)'$ 的模为 $\sqrt{\Sigma q_i \bar{q}_i}$)． 利用列向量的 Schmidt 正交化，可得一以 e 为第一列的酉方阵 W，

$$YW = W[\lambda_1^2, Y_1] \qquad (\bar{Y}_1' = Y_1, Y_1 > 0).$$

因此，由归纳法知，有 $U \in U(n,Q)$ 使

$$U'Z\bar{Z}\bar{U}' = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]^2.$$

故 $V = [\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}]UZ$ 为酉方阵，使(13.2.7)成立.

如果 Z 退化，则 UZ 有零行向量，而非零向量归一化后，成为

不完全正交向量组，再用行向量组的 Schmidt 正交化，把它们扩充成一组酉基底，故存在酉方阵 V 使

$$UZV^{-1}=A.$$

关于体 Q 上的微分运算，我们有下面一些法则：

1. 用 $\frac{\partial}{\partial q}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial a}-i\frac{\partial}{\partial b}-j\frac{\partial}{\partial x}-k\frac{\partial}{\partial y}\right)$ 表形式微分算子，并令

$$\partial_Z=\left(\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

容易验证，对实函数 $u(z)$，

$$du(z)=4\operatorname{Re}\operatorname{tr}(\partial_Z' u\cdot dZ). \tag{13.2.8}$$

用 $4\operatorname{Re}\operatorname{tr}(\partial_Z'\cdot Y(Z))$ 表示 Q 矩阵值函数 Y 的形式散度.

2. 如果 $dZ_1=A^{-1}dZB^{-1}$，那么对于实函数 u，实矩阵值函数 R，Q 矩阵值函数 Y，分别有

$$\partial_{Z_1}' u=B\cdot\partial_Z' u\cdot A,$$

$$\operatorname{tr}(\partial_{Z_1}'\cdot R)=\operatorname{tr}(B\cdot\partial_Z'\cdot A\cdot R) \tag{13.2.9}$$

$$\operatorname{Re}\operatorname{tr}(\partial_{Z_1}'\cdot Y)=\operatorname{Re}\ \operatorname{tr}(B\cdot\partial_Z'\cdot A\cdot Y). \tag{13.2.10}$$

(13.2.9)的证明：令 $I_{\alpha\beta}$ 为 $O^{(n)}$ 中把 α 行 β 列元素改为 1 得到的矩阵．两矩阵的 (β,α) 元素相等可写为

$$\operatorname{tr}(I_{\alpha\beta}C)=\operatorname{tr}(I_{\alpha\beta}D)\ \text{或}\ \operatorname{tr}(CI_{\alpha\beta})=\operatorname{tr}(DI_{\alpha\beta}).$$

由于形式矩阵等式 $\partial_{Z_1}'=B\cdot\partial_Z'\cdot A$ 依分量相等，故得(13.2.9)．

借 $iI_{\alpha\beta}$，$jI_{\alpha\beta}$，$kI_{\alpha\beta}$ 之助亦能证得(13.2.10)．

3. A 为常 Q 值矩阵，从形式运算

$$\frac{\partial}{\partial z}\cdot q\cdot dz\left(=dz\cdot q\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)=\operatorname{Re}\ q,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\cdot q\cdot\bar{d}z=-\frac{1}{2}\bar{q},$$

可得

$$\partial_Z'\cdot A\cdot Z=(\operatorname{Re}\operatorname{tr}A)\cdot I,\ \partial_Z'\cdot A\cdot\bar{Z}=-\frac{1}{2}(\operatorname{tr}\bar{A})I, \tag{13.2.11}$$

$$\partial'_Z \cdot A \cdot Z' = \text{Re } A', \quad \partial'_Z A\bar{Z}' = -\frac{1}{2}\bar{A}'.$$

4. 对实函数 u, v 有

$$\partial'_Z(uv) = u\partial'_Z v + v\partial'_Z u$$

$$\partial'_Z f(u) = f'(u)\partial'_Z u.$$

又从(13.2.3),

$$(\det Z)^{-1}d(\det Z) = \text{Re tr } Z^{-1}d\, Z \qquad (13.2.12)$$

$$\partial'_z(\det Z) = (\det Z)\cdot Z^{-1}.$$

§ 13.3 $\mathscr{R}_1(n,Q)$ 的连续运动群，调和算子

设

$$G = \{x \in M(2n,Q), \bar{x}Kx' = K, \det x = 1, K = [I^{(n)}, -I^{(n)}]\} \qquad (13.3.1)$$

$$N = \{[U, V], U, V \in U(n, Q)\}, \qquad (13.3.2)$$

则 N 为 G 的紧致子群，把 x 写成

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, A = A^{(n)}, B = B^{(n)}, C = C^{(n)}, D = D^{(n)}, \qquad (13.3.3)$$

易证

$$x^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{A}', & -\bar{C}' \\ -\bar{B}', & \bar{D}', \end{pmatrix}, \qquad (13.3.4)$$

$$BD^{-1} = \overline{CA^{-1}}' = \bar{A}'^{-1}C^{-1}, \overline{A^{-1}B}' = D^{-1}C. \qquad (13.3.5)$$

考虑映射

$$\sigma: G \ni x \to BD^{-1} \in R_1(n, Q).$$

由(13.3.4), (13.3.5)易得 $\sigma(x) = \sigma(x_1)$ 的主要条件，$\sigma(x^{-1}x_1) = 0$，或 $x^{-1}x_1 \in N$. 由此易证，σ 诱导出左陪集空间 G/N 到 $R_1(n,Q)$ 上的一对一的满映射 σ'，因此得到，群 G 依下面的意义在 $R_1(n,Q)$ 上可递.

f_x: $R_1(n,Q) \ni Z \to f_x(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \in R_1(n,Q)$.

此变换把 $Z_0 = -A^{-1}B$ 映为原点. 易知，把 $Z_0 \in R_1(n,Q)$ 变为 O 的变形必为

$$Z_1 = P^{-1}(Z - Z_0)(I - \bar{Z}'_0 Z)^{-1}R, \qquad (13.3.6)$$

$$P\bar{P}' = I - Z_0\bar{Z}_0', \quad R\bar{R}' = I - \bar{Z}_0'Z_0, \qquad (13.3.7)$$

保持原点不动的变形.

$$Z_1 = UZV \quad (U, V \in U(n, Q)) \qquad (13.3.8)$$

在 $U(n,Q)$ 上可递，变形(13.3.6)保持 $U(n,Q)$ 不变，因此，保持点 Z_0 不动的子群在 $U(n,Q)$ 上也可递. 由定理 13.2.1 可得

定理 13.3.1 $R_1(n,Q)$ 的运动群由变形(13.3.8)和

$$Z_1 = M^{-1}(Z - \Lambda)(I - \Lambda Z)^{-1}M \qquad (13.3.9)$$

演成，这里

$$\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n], \quad M = [m_1, \cdots, m_n],$$

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n < 1, \quad m_a = \sqrt{1 - \lambda_a^2}.$$

下面计算 $R_1(n,Q)$ 的 Laplace 算子.

微分(13.3.6)得

$$dZ_1 = P^{-1}(I - Z\bar{Z}_0')^{-1}dZ(I - \bar{Z}_0'Z)^{-1}R.$$

因此

$$\partial'_{Z_1} = R^{-1}(I - \bar{Z}_0'Z)\partial'_Z(I - Z\bar{Z}_0')\bar{P}'^{-1}; \qquad (13.3.10)$$

$$\bar{\partial}_{Z_1} = P^{-1}(I - Z_0\bar{Z}')\bar{\partial}_Z(I - \bar{Z}'Z_0)\bar{R}'^{-1}; \qquad (13.3.10)'$$

这里矩阵 ∂'_Z, $\bar{\partial}_Z$ 并不在后面的矩阵上施行微分运算，利用 Laplace 算子在原点处变为

$$16\text{Re tr}(\partial'_{Z_1}\bar{\partial}_{Z_1})|_{Z_1=0}.$$

可得

定理 13.3.2 $R_1(n,Q)$ 的 Laplace 算子在 $Z = Z_0$ 处的值等于

$$16\text{Re tr}\Delta_Z u(z)|_{Z=Z_0} = 16\text{Re tr}\{\partial'_Z(I - Z_0\overset{\downarrow}{\bar{Z}}{}')(\overset{\downarrow}{\bar{\partial}}_Z u) \cdot (I - \overset{\downarrow}{\bar{Z}}{}'Z_0)\}|_{Z=Z_0}, \qquad (13.3.11)$$

其中 ∂'_Z 依 §13.2 的意义作用于箭头所指的变元.

证 由(13.3.7)以及

$$\text{Re tr}(AB) = \text{Re tr}(BA),$$

并应用 §13.2 关于 Q 上微分运算公式，即得(13.3.11).

例 设 $n = 1$, $R_1(1,Q) = \{q \in Q, |q| < 1\}$,

$U(1,Q) = \{|q| = 1\}$. Laplace 算子为

$$16(1-q\bar{q})\left\{(1-q\bar{q})\frac{\partial^2 u}{\partial q\partial\bar{q}}+\frac{1}{2}\left(\bar{q}\frac{\partial u}{\partial\bar{q}}+\frac{\partial u}{\partial q}q\right)\right\}$$

$$=(1-a^2-b^2-x^2-y^2)\left\{(1-a^2-b^2-x^2-y^2)\right.$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\left.+4\left(a\frac{\partial u}{\partial a}+b\frac{\partial u}{\partial b}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}.$$

Laplace 算子(13.3.11)还可写为

$$16\operatorname{Re}\operatorname{tr}\{(I-\bar{Z}'Z)\partial_Z'(I-Z\bar{Z}')\overset{\downarrow}{\bar{\partial}}_Z u\}$$
$$+8\operatorname{Re}\operatorname{tr}\{(I-\bar{Z}'Z)(\bar{Z}'\bar{\partial}_Z u+\partial_Z' u\cdot Z)\},\tag{13.3.12}$$

其中箭头表示 ∂_Z' 只对 $\bar{\partial}_Z u$ 施行微分运算.

定义 在 $R_I(n,Q)$ 内适合 $\operatorname{Re}\operatorname{tr}\Delta_Z u=0$ 的实函数 $u(Z)$ 称为 $R_I(n,Q)$ 内的调和函数.

§13.4 ξ 类调和函数的极值原理

$\partial R_I(n,Q)$ 表示 $R_I(n,Q)$的边界. $L^{(r)}$ 表示使 $I-Z\bar{Z}'$ 的秩为 r 的点所成的集合. 于是 $\partial R_I(n,Q)$ 为无公共元素的集合

$$L^{(0)}=U(n,Q),\ L^{(1)},\ \cdots,\ L^{(n-1)}$$

的和集. 仿照华罗庚[1]中§5.8, 引入 r 盖的概念: 对于任意两个给定的酉方阵 U, V, 称形如

$$U[I^{(n-r)},Z_1]V,\qquad Z_1\in R_I(r,Q)\tag{13.4.1}$$

的点所成的点集为一个 r 盖. 于是 $L^{(r)}$ 的每一点属于一个 r 盖. 不过任何两个 r 盖可能有公共点. 假定实函数 $u(Z)$ 定义在 $\overline{R_I(n,Q)}\backslash U(n,Q)$. 对任一点 Z_1 的任一 r 盖 $(r>0)$, $u(Z)$有二阶连续偏微商. 现在讨论在点(13.4.1)上 $\operatorname{Re}\operatorname{tr}\Delta_Z u(Z)$的值. 由于(13.3.11)在 $W=UZV$ 下不变, 故只须研究 $\operatorname{Re}\operatorname{tr}\Delta_Z u(Z)$在形如

$$[I^{(n-r)},Z_1],\qquad Z_1\in R_I(r,Q)\tag{13.4.2}$$

的值即可. 易证, 在(13.4.2)的各点, $\operatorname{Re}\operatorname{tr}\Delta_Z u(Z)$ 简化成为

$$\operatorname{Re}\operatorname{tr}\{\partial_{Z_1}'(I^{(r)}-Z_1\overset{\downarrow}{\bar{Z}_1'})\overset{\downarrow}{\bar{\partial}}_{Z_1}u([I^{(n-r)},Z_1])(I^{(r)}-\overset{\downarrow}{\bar{Z}_1'}Z_1)\tag{13.4.3}$$

或

$$\operatorname{Re} \operatorname{tr}\Delta_{Z_1} u([I^{(n-r)}, Z_1]).$$

定义 一个实函数 $u(Z)$，具有上述微分性质，在 $\overline{R_1(n, Q)}\setminus U(n,Q)$ 上适合

$$\operatorname{Re}\operatorname{tr}\Delta_Z u(Z) = 0, \tag{13.4.4}$$

且在 $\overline{R_1(n, Q)}$ 上连续的函数称为 ξ 类调和函数类.

定理 13.4.1 每一个 ξ 类调和函数必定在 $U(n, Q)$ 上取最大值(或最小值).

仅须证每一调和函数在边界上取极值即足够. 因为在 $L^{(r)}(0 < r < n)$ 上一点的问题与在 $R_1(r, Q)$ 上的问题实质上是等价的. 先证

定理 13.4.2 如果实函数 $u(Z)$ 在 $R_1(n, Q)$ 内具有二阶连续偏导数，且在 $R_1(n, Q)$ 内

$$\operatorname{Re} \operatorname{tr}\Delta_Z u(Z) > 0, \tag{13.4.5}$$

则 $u(Z)$不能在 $R_1(n, Q)$ 的内点取最大值.

证 假定 $u(Z)$在一内点 Z_0 取最大值，换变数，可以假定 $Z_0 = 0$. 由(13.4.5),

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_{\alpha\beta}\partial z_{\alpha\beta}} u(Z)\bigg|_{Z=0} > 0. \tag{13.4.6}$$

由于 $u(z)$ 在 $z = 0$ 取最大值，故

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{\alpha\beta}\partial \bar{z}_{\alpha\beta}} u(Z)\bigg|_{Z=0} \leqslant 0$$

与(13.4.6)矛盾.

定理 13.4.1 的证明. 设

$$M = \max_{Z\in\partial R_1(n,Q)} u(Z).$$

而在内点 Z_0 处，

$$u(Z_0) > M + \varepsilon. \tag{13.4.7}$$

作

$$u_\eta(Z) = u(Z) + \eta\operatorname{tr}((Z - Z_0)(\overline{Z - Z_0})'), \quad (\eta > 0)$$

那么利用§13.2的公式，$\operatorname{Re}\operatorname{tr}\Delta_Z u_\eta(Z)$等于

$$\begin{aligned}
&\eta\operatorname{Re}\operatorname{tr}\Delta_Z\operatorname{tr}((Z-Z_0)(\overline{Z-Z_0})') \\
&=2\eta\operatorname{Re}\operatorname{tr}(I-Z\bar{Z}')\operatorname{Re}\operatorname{tr}(I-\bar{Z}'Z) \\
&\quad+2\eta\operatorname{Re}\operatorname{tr}\bar{Z}'Z\operatorname{Re}\operatorname{tr}(I-\bar{Z}'Z) \\
&=2n\cdot\eta\operatorname{tr}(I-\bar{Z}'Z)>0.
\end{aligned}$$

由定理13.4.2，$u_\eta(Z)$不能在内点取最大值，但是

$$\max_{Z\in\partial R_I(n,Q)}u_\eta(Z)\leqslant M+\eta\max_{Z\in\partial R_I(n,Q)}\operatorname{tr}((Z-Z_0)(\overline{Z-Z_0})');$$

$$u_\eta(Z_0)=u(Z_0)>M+\varepsilon.$$

故当η充分小时，

$$u_\eta(Z_0)>\max_{Z\in\partial R_I(n,Q)}u_\eta(Z)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

故$u_\eta(Z_0)$必在$R_I(n,Q)$的内点取最大值。这是矛盾．故(13.4.7)不能成立，即在$R_I(n,Q)$内，$u(Z)\leqslant M$.

可有如下的推论

定理 13.4.3 两个ξ类调和函数，若在$U(n,Q)$上相等，则它们在$\overline{R_I(n,Q)}$上恒等.

定理 13.4.4 如果一个ξ类调和函数在$R_I(n,Q)$的内点取最大值(或最小值)，则它一定是常数.

我们将在下一节求出ξ类调和函数的Poisson积分公式，于是$U(n,Q)$是$R_I(n,Q)$的特征流形的断言得到证实.

§13.5 Poisson 核和 Poisson 公式

变换(13.3.6)在$U(n,Q)$上引起的变换为

$$\begin{aligned}
U_1&=P^{-1}(U-Z_0)(I-\bar{Z}_0'U)^{-1}R \\
&=\bar{P}'(I-U\bar{Z}_0')^{-1}(U-Z_0)\bar{R}'^{-1},
\end{aligned}\tag{13.5.1}$$

其Jacobian $\dot{U}_1/\dot{U}$称为$R_I(n,Q)$的Poisson核(参阅华罗庚[4])，记为$P(Z_0,U)$．我们有

定理 13.5.1 $R_I(n,Q)$的Poisson核$P(Z,U)$为

$$\left(\frac{\det(I-Z\bar{Z}')}{\det(I-\bar{Z}'U)\det(I-\bar{U}'Z)}\right)^{2n+1}. \qquad (13.5.2)$$

证 微分(13.5.1)可得

$$dU_1=\bar{P}'(I-U\bar{Z}_0')^{-1}dU(I-\bar{Z}_0'U)^{-1}R,$$

所以

$$U_1^{-1}dU_1=\bar{R}'(U-Z_0)^{-1}dU(I-\bar{Z}_0'U)^{-1}R,$$

即

$$\delta U_1=\bar{R}'(I-\bar{U}'Z_0)^{-1}\delta U(I-\bar{Z}_0'U)^{-1}R,$$

此处 $\delta U_1=U_1^{-1}dU_1$, $\delta U=UdU$.

由定理 13.2.1，存在 $W_1, W_2\in U(n,Q)$ 使

$$(I-\bar{Z}_0'U)^{-1}R=W_1LW_2^{-1}, \qquad (13.5.3)$$

此处 $L=[l_1,\cdots,l_n]$, $0<l_1\leqslant l_2\leqslant\cdots\leqslant l_n<1$.

故

$$\bar{W}_2'\delta U_1W_2=L(\bar{W}_1'\delta UW_1)L.$$

利用第十章中的结果，可得

$$\dot{U}_1=\dot{U}(\det L)^{4n+2},$$

从(13.5.3)，得

$$P(Z_0,U)=(\det L)^{4n+2}=\frac{(\det R)^{4n+2}}{\det(I-\bar{Z}_0'U)^{4n+2}}.$$

由于(13.3.7)，

$$(\det R)^2=\det(I-\bar{Z}_0'Z_0)=\det(I-Z_0\bar{Z}_0'),$$
$$\det(I-\bar{Z}_0'U)=\det(I-\bar{U}'Z_0).$$

故得定理.

定理 13.5.2 若在 $R_1(n,Q)$ 的一个变形(13.3.6)之下，Z_1，U_1 分别变为 Z_2,U_2，那么

$$P(Z_2,U_2)=P(Z_1,U_1)P(Z_0,U_1)^{-1}. \qquad (13.5.4)$$

证 由 Poisson 核定义，

$$\dot{U}=P(Z_1,U_1)\dot{U}=P(Z_2,U_2)\dot{U}_2,$$
$$\dot{U}_2=P(Z_0,U_1)\dot{U}_1.$$

故得(13.5.4).

由 Poisson 核的定义，可得其调和性．令

$$Q(Z,U)=\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\Delta_Z P(Z,U).$$

利用调和算子的不变性及(13.5.4)，易得

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\Delta_Z P(Z_1,U_1)=(\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\Delta_{Z_2}P(Z_2,U_2))\cdot P(Z_0,U_1).$$

特别当 Z_2 为 0 时，$Z_1=Z_0$．故

$$Q(Z_1,U_1)=Q(0,U_2)P(Z_1,U_1).$$

易证 $Q(0,U_2)$ 与 U_2 无关，记为 e．对恒等式

$$\int_{U(n,Q)}P(Z,U)\dot{U}=C_n$$

(C_n 为 $U(n,Q)$ 的体积) 在积分号下求微分，可得

$$\int_{U(n,Q)}Q(Z,U)\dot{U}=0.$$

故

$$0=\int_{U(n,Q)}e\cdot P(Z,U)\dot{U}=eC_n.$$

因此 $e=0$，即

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\Delta_Z P(Z,U)=0. \tag{13.5.5}$$

于是，并未用到$P(Z,U)$的具体表达式，只用到其可微性，证得了

定理 13.5.3 Poisson 核 $P(Z,U)$是 Z 的调和函数．

积分号下求微商，便知 $U(n,Q)$ 上连续函数 $\varphi(U)$ 的 Poisson 积分

$$u(Z)=\frac{1}{C_n}\int_{U(n,Q)}\varphi(U)P(Z,U)\dot{U} \tag{13.5.6}$$

是一个调和函数，不但如此，还要证明

定理 13.5.4 Poisson 积分(13.5.6)定义的 $u(Z)$是 ξ 类调和函数．

证 只须证明下面两式

$$\lim_{Z\to V}u(Z)=\varphi(V), \tag{13.5.7}$$

$$\lim_{Z\to[1,Z_1]}u(Z)=\frac{1}{C_{n-1}}\int_{U(n-1,Q)}\varphi([1,U_1])P_{n-1}(Z,U_1)\dot{U}, \tag{13.5.8}$$

其中 $P_{n-1}(Z_1, U_1)$为 $R_I(n-1, Q)$ 的 Poisson 核。

证 先证(13.5.7)当 $n=1$ 时的情形，这就是要证

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{C_1}\int_{|q|=1}\varphi(q)\frac{(1-\rho^2)^3}{|1-\rho q|^6}\dot{q}=\varphi(1), \qquad (13.5.9)$$

这里 $\dot{q}$ 为 $U(1, Q)$ 的体积元素. 令

$$q=(1+h)(1-h)^{-1}, \quad (h=(q-1)(q+1)^{-1}).$$

易证，当 q 过 $U(1,Q)-\{-1\}$ 时，$\mathrm{Re}\,h=0$，h 过所有"纯虚数" $ib+jx+ky$，而且

$$q^{-1}dq=\delta q=2(1+h)^{-1}dh(1+h)^{-1},$$

$$\dot{q}=2^3(1-h^2)^{-3}\dot{h},$$

$$C_1=2^3\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{dbdxdy}{[1+b^2+x^2+y^2]^3}$$

$$=2^3\cdot 4\pi\int_0^{\infty}\frac{R^2dR}{(1+R^2)^3}=2\pi^2. \qquad (13.5.10)$$

令 $q_1=(q-\rho)(1-\rho q)^{-1}$，$h_1=\dfrac{1+\rho}{1-\rho}h$，则(13.5.9)又可写成

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{C_1}\int_{|q|=1}\varphi(h)2^3(1-h_1^2)^{-3}\dot{h}_1=\phi(o), \ (\phi(h)=\varphi(q)),$$

或

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{C_1}\int_{(h_1)}\phi\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}h_1\right)2^3(1-h_1^2)^{-3}\dot{h}_1=\phi(o).$$

但由积分(13.5.10)的绝对收敛及 $\phi(h)$ 是连续的，即得上式.

用同样方法可证：(13.5.7)当 $n>1$ 的情形. (参阅第十一章).

先证

$$\lim_{\rho\to 1}u([\rho,0,\cdots,0])=\frac{1}{C_{n-1}}\int_{U(n-1,Q)}\varphi([1,U_1])\dot{U}_1, \qquad (13.5.11)$$

$$H=(U-I)(U+I)^{-1}, \qquad (13.5.12)$$

$$U_1=M^{-1}(U-[\rho,0^{(n-1)}])(I-[\rho,0^{(n-1)}]U)^{-1}M,$$

$$H_1 = LHL,$$

其中 $M=\sqrt{[1-\rho^2, I^{(n-1)}]}$, $L = \left[\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}, I^{(n-1)}\right]$.

于是

$$\dot{U}_1 = P(\Lambda, U)\dot{U}, \qquad \dot{H}_1 = \dot{H}(\det L)^{4n+2}, \qquad (13.5.13)$$

其中 $\Lambda = [\rho, 0^{(n-1)}]$. 但(参阅第十章)

$$\dot{U} = 2^N \det(I - H^2)^{-\frac{N}{n}} \dot{H}$$

$$\dot{U}_1 = 2^N \det(I - H_1^2)^{-\frac{N}{n}} \dot{H}_1,$$

此处 $N = \dim U(n, Q) = \dim USp(2n) = n(2n+1)$.

而(13.5.11)化为要证

$$\lim_{\rho \to 1} \frac{1}{C_n} \int_{(H_1)} \phi(L^{-1}H_1L^{-1}) 2^N \det(I - H_1^2)^{-(2n+1)} \dot{H}_1$$

$$= \frac{1}{C_n} \int_{(H_1)} \phi([0, \tilde{H}]) 2^N \det(I - H_1^2)^{-(2n+1)} \dot{H}_1$$

$$= \frac{1}{C_{n-1}} \int_{(\tilde{H})} \phi([0, \tilde{H}]) 2^{(n-1)(2n-1)} \det(I - \tilde{H}^2)^{-(2n-1)} \dot{\tilde{H}}.$$

$$(13.5.14)$$

但是第一个等式可由 $\phi(H_1)$ 的连续性及积分

$$\frac{1}{C_n} \int_{(H_1)} 2^N \det(I - H_1^2)^{-(2n+1)} \dot{H}_1 = 1$$

的绝对收敛性推出、第二个等式可由第十章中求 C_n 时用到的递推公式推出。

这样，我们证明了(13.5.7)，(13.5.8)沿特殊途径成立，由定理13.5.2 及一致连续性，知沿任何途径取极限，(13.5.7)，(13.5.8)也能成立。

由 §13.4 及定理 13.5.4 知，关于 $R_1(n, Q)$ 的 Dirichlet 问题，其解由

$$u(z) = \frac{1}{C_n} \int_{U(n,Q)} \varphi(U) P(Z, U) \dot{U}$$

唯一给出。

特别取 $Z=\rho I$，$(0<\rho<1)$，则当 $\rho\to 1$ 时，即得酉辛群 $USp(2n)$ 上的 Abel 求和收敛定理，如果 $\varphi(U)$ 在 $U(n,Q)$ 上连续的话，而这时所对应的核就与这里所得的 Poisson 核相一致。

结　束　语

本书讨论了三个最重要的紧致李群，即酉群、旋转群及酉辛群上的调和分析．以G表示这三个群中的任意一个。

本书内容可大致概括如下：

由于任意紧致李群的不可约表示的全体是连续函数的完整正交系，所以在G上的连续函数$u(g)$，$g\in G$，都可以展开成Fourier 级数。

1　把酉群看作多复变数第一类典型域$I-Z\bar{Z}'>0$的特征流形，由于典型域有 Poisson 核，由此导出酉群上的 Poisson 核，将 Poisson 核按特征进行展开，就得到酉群上的 Fourier 级数的 Abel 求和.

同样把旋转群看作实的第一类典型域$I-XX'>0$的特征流形，由于实典型域有 Poisson 核，由此可以导出旋转群上的 Poisson 核，将 Poisson 核按特征展开，就得到旋转群上的 Fourier 级数的 Abel 求和.

同样把酉辛群看作四之数体上的第一类典型域$I-Z\bar{Z}'>0$的特征流形，类似酉群和旋转群，可以得到酉辛群上的 Poisson 核以及酉辛群上的 Fourier 级数的 Abel 求和.

这样所得到的 Poisson 核，都是正的，有δ函数性质．用群表示及矩阵积分的技巧，可以完全定出展开的 Poisson 核的系数的具体表达式，并且有

定理1　若$u(g)$为G上的连续函数，$g\in G$，则$u(g)$的 Fourier 级数可以 Abel 求和于它自己.

2　在这三个群上，都可以构造出 Cesàro (c,α) 和，与 Abel 和不同，这个 Cesàro(c,α)和是有限项的和，其相应的 Cesàro(c,α)核是半正定的、且具有十分简洁的形式，当α趋于无穷时，即为上

述的 Poisson 核，并且有

定理 2 若 $u(g)$ 为 G 上的连续函数，$g \in G$，则 $u(g)$ 的 Fourier 级数可以 Cesàro (c, α) 求和于它自己，但 α 有适当限制。

若 $u(g) \in \mathrm{Lip}\, P$，则可以得到 Cesàro (c, α) 和 $u(g)$ 之误差的估计。

这样定义的 Cesàro 和的系数都是可以具体算出的，尤其当 $\alpha = 1$ 时，就得到 Fejér 求和，其 Fejér 核是定正的。

3 在这三个群上都可以定出其 Fourier 级数的部分和及相应的 Dirichlet 核，并由此可以给出相应的收敛判别法。

定理 3 若 $u(g)$ 为 G 上的连续函数，$g \in G$，则 $u(g)$ 的 Fourier 级数的部分和收敛于它自己，但 $u(g) \in C^{\frac{N}{2}+P}$ $(0 < P \leqslant 1)$，这里 N 等于 G 的维数减 G 的独立变动的特征根的个数。

此外还可以得到一些 Fourier 级数的绝对收敛的判别法。

部分和与 $u(g)$ 之差为

$$O\left(\max\left(\frac{\ln \beta^2}{N} N\right)^{\frac{1}{\beta+1}}, \frac{\ln^{\beta-1}}{NP} N\right),$$

这里 β 为 G 的独立变动的特征根的个数。

4 在这三个群上，都可以定义其 Fourier 级数的"球求和"，并由此得出"球求和"的积分表达式，且有

定理 4 若 $u(g)$ 为 G 上的连续函数，$g \in G$，则 $u(g)$ 的 Fourier 级数可以 Abel、Gauss-Sommerfeld 及 δ 次 Riesz 求和于它自己，但 $\delta > \frac{1}{2}(\dim_R G - 1)$。

问题是：上述这些结论，对一般的紧致李群是否成立？例如：如何构造紧致李群的 Poisson 核，Abel 和及相应的 Abel 求和定理；如何构造 Cesàro (c, α) 核及 Cesàro (c, α) 和及相应的求和定理；对其 Fourier 级数的部分和如何定出相应的 Dirichlet 核以及其收敛判别法；"球求和"的积分表达式以及相应的收敛定理等等，都有待进一步研究。

参考文献

华罗庚

[1] 多复变数函数论中的典型域的调和分析，科学出版社，1958年。

[2] 紧致群上的连续函数所成的空间中的一条收敛定理，科学记录，**2** (1958)，341—344。

[3] 一个偏微分方程组，科学记录，**1** (1957)，7—8。

[4] 从单位圆谈起，科学出版社，1977年。

陈建功

[1] 三角级数论，上海科技出版社，1964，1976。

华罗庚与万哲先

[1] 典型群，上海科技出版社，1963年。

华罗庚与陆启铿

[1] Theory of harmonic functions in classical domain, *Scientic Sinica*, **8** (1959), 1031—1094.

陆启铿

[1] 典型流形与典型域，上海科技出社版，1963 年。

龚昇

[1] 酉群上的富里埃分析 I，数学学报，**10** (1960)，239—261。

[2] 酉群上的富里埃分析 II，数学学报，**12** (1962)，17—31。

[3] 酉群上的富里埃分析 III，数学学报，**13** (1963)，152—161。

[4] 酉群上的富里埃分析 IV，数学学报，**13** (1963)，323—331。

[5] 酉群上的富里埃分析 V，数学学报，**15** (1965)，305—325。

[6] 旋转群上的富里埃级数的部分和，中国科学技术大学学报，**9** (1979)，25—30.

钟家庆

[1] 一类积分行列式及其对群表示论的应用，数学学报，**19** (1976)，88—106。

[2] 旋转群的调和分析——Abel 求和，中国科学技术大学学报，**9** (1979)，31—43。

[3] 群表示论与 Grassmann 流形的 Schubet 计算(尚未发表)。

孙继广

[1] 一种有界对称域的调和函数，中国科学技术大学学报，**2** (1973)，55—43。

王世坤、董道珍

[1] 旋转群上的调和分析 I，Fourier 级数收敛判别法，数学年刊，**2**(1983)。

[2] 旋转群上的调和分析 II，Fourier 级数的 Cesàro 求和(尚未发表)。

[3] 旋转群上的调和分析 III，Fourier 级数的球求和(尚未发表)。

贺祖祺、陈广晓

[1] 酉群上的调和分析 I，Fourier 级数的收敛判别法，数学研究与评论，**1**(1981)，29—41。

[2] 酉群上的调和分析 II，Fourier 级数的 Cesàro 求和(尚未发表)。

[3] 酉辛群上的调和分析 III，Fourier 级数的 Abel 求和(尚未发表)。

[4] 西辛群上的调和分析 IV，Fourier 级数的球求和(尚未发表)。
陈广晓
[1] 西辛群的体积，科学通报，19 (1981)，1212。
[2] 四元数体上的典型域的调和分析(尚未发表)。
Bochner, S.
[1] Sumation of multiple Fourier series by Spherical means, *Tran. Amer. Math. Soc.* **46**(1936), 175—207.
Boerner, H.
[1] Representations of Groups, 1963.
Cartan, E.
[1] Sur les domains bornés homogenès de l'espace de n variables complexes Hanburg, *Univ. Math. Sem. Abhandl* **11**(1936), 106—162.
Chandrasekharan, K. and Minakshisundaran S.
[1] Typical means, Oxford University Press, 1952.
Chevalley, C.
[1] Theory of Lie Groups I, Princeton, 1946.
Erdélyi A., magnus. W., Oberbettinger. E. and Tricomi F. G.
[1] Higher Transcendental functions, McGraw-Hill, New York, 1953.
Helgason, S.
[1] Differential geometry Lie Groups and Symmetric spaces Academic Press, New York San Francisco London, 1978.
Jackson, D.
[1] The theory of appoximation, 1930.
Loomis, L. K.
[1] An introduction to abstract harmonic analysis, 1953.
Murnaghan, F. D.
[1] The theory of group representations, 1938.
[2] Lectures on Applied Mathematics, Vol 3, The Unitary and rotation groups, 1962.
Masielak, J.
[1] On absolute Convergence of multiple Fourier Series, *Annals Polonici Math,* **3**(1958—1959), 107—120.
Peter, F. and Weyl, H.
[1] Die Vollstäudighkeet der primitiven Darstellungln einer geschlossen Kontinuerlicher Grupper, *Math. Ann.* **97**(1927), 735—755.
licher Groupper, Math. Ann. 97(1927), 735—755.
Sakamoto, R.
[1] J. Math. Kyofo univ. **10**(1970).
Titchmerch, E. C.
[1] An introduction to the theory of Fourier integral. Oxford, 1948.
Weil. A.
[1] L'intégratun dan les Groups Topologiques et ses applications,

1953.

Weyl, H.

[1] Harmonic on homogeneous manifolds, *Ann, of Math*, **35**(1934), 486—490.

[2] The classical groups, 1946.

Young, W. H.

[1] On multiple Fourier Series, *Proc of London Math, Soc, and Series*, **11**(1911—1912), 133—134.

Zygmund, A.

[1] Trigonometric Series Vol I and II, Canbridge, 1959.

[2] On the differentiability of multiple integrals, *Fund. Math*, **23** (1934), 143—149.

Гельфанд И. Н. и Виленкин Н. Я.

[1] Некоторые применения гармонического анализа оснощенные гильбертовы прострастеа, Москва, 1961.

Гельфанд И. Н. и Наймарк М. А.

[1] Унитярные предетавленния классических групп, *Труды Матем ин км. В. А. Стеклове*, **36** (1950).

Гельфанд И. Н., Миилое Р. А. и Шапиро Э. Я.

[1] Представления группы вращений и группы Лоренца, Москва, 1958.

Левитан Б. М.

[1] Понта-периодическая функций, 1953.

Наймарк М. А.

[1] Ленейные предетавления группы Лоренца, Москва, 1958.

Натансов И. Н.

[1] Констуктивная теория функций, 1949.

Понтрягин Л. С.

[1] Непрерывные группы, Москва, 1954.

附录　紧致李群的表示

1. 模表示

若 S 为任意集合，$\mathscr{P}$ 为域 K 上的有限维向量空间，若对 S 中任一元素 σ，有 $\mathscr{P}$ 上的一同态 $P(\sigma)$．与之对应，则称 $(\mathscr{P},P)$ 为域 K 上的一个 S 模，显然一个 S 模是带域 K 的运算及集合 S 的运算的加法群．

二个 S 模 $(\mathscr{P},P)$ 及 $(\mathscr{P}_1,P_1)$ 称为同构，若存在 $\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{P}_1$ 之间的同构 I，使得 $I\circ P(\sigma)=P_1(\sigma)\circ I$ 对每个 $\sigma\in S$ 都成立．

特别，当 S 为群 G 时，ϵ 为 G 的单位元．一个 S 模 $(\mathscr{P},P)$ 称为 G 的表示空间，若：

1) $P(\sigma\tau)=P(\sigma)\circ P(\tau)$ 对任意 G 中的 σ,τ 都成立，

2) $P(\epsilon)$ 为 $\mathscr{P}$ 的单位映射．

显然 $P(\sigma^{-1})$ 为 $P(\sigma)$ 的逆映射，若 $(\mathscr{P},P)$ 为群 G 的表示空间，映射 P 称为 G 的表示，$\mathscr{P}$ 的维数称为 P 的阶．

有时我们简单地记 $(\mathscr{P},P)$ 为 $\mathscr{P}$．

若 $(\mathscr{P},P)$ 为群 G 的表示空间，对 $\mathscr{P}$ 选择一组基底 $\{e_1,\cdots,e_d\}$，于是对每个线性同态 $P(\sigma)$ $(\sigma\in G)$ 可表为一 d 阶矩阵 $\tilde{P}(\sigma)=(x_{ij})$，其系数由下面式子给出：

$$\tilde{P}(\sigma)e_i=\sum_{j=1}^{d}x_{ji}e_j.$$

显然 $\tilde{P}(\sigma\tau)=\tilde{P}(\sigma)\tilde{P}(\tau)$，$\tilde{P}(\epsilon)=I$（单位矩阵）．反之，任一将 G 映入到以 K 为系数的 d 阶矩阵的映射 $\tilde{P}$ 称为 G 的（d 阶）表示，如果 $\tilde{P}(\sigma\tau)=\tilde{P}(\sigma)\tilde{P}(\tau)$，$\tilde{P}(\epsilon)=I$ 成立，前一种表示称为抽象表示，后一种称为矩阵表示．若矩阵表示 $\tilde{P}$ 是由于对抽象表示 P 的表示空间选择了基底而得来的，则称 $\tilde{P}$ 为 P 的矩阵形式，

P 为 $\tilde{P}$ 的一个抽象形式。显然，任何矩阵表示至少有一抽象形式，任一阶 >0 的抽象形式至少有一矩阵形式。

群 G 的二个抽象表示 P_1, P_2 称为等价的，若它们的表示空间是同构的，群 G 的二个矩阵表示 $\tilde{P}_1$，$\tilde{P}_2$ 称为等价的，若存在一正则矩阵 r，使得

$$\tilde{P}_2(\sigma) = r\tilde{P}_1(\sigma)r^{-1}$$

对每个 $\sigma \in G$ 都成立(这导出 $\tilde{P}_1$，$\tilde{P}_2$ 有相同的阶)．容易证明：若矩阵表示 $\tilde{P}_1$，$\tilde{P}_2$ 是等价的，则它们有共同的抽象形式，且 $\tilde{P}_1$ 的每个抽象形式等价于 $\tilde{P}_2$ 的每个抽象形式；若 P_1, P_2 为群 G 的阶数相同的等价抽象表示，则 P_1 的任何矩阵形式，等价于 P_2 的任何矩阵形式．

若 $(\mathscr{P}, P)$ 为任意 S 模，$\mathscr{P}$ 中一向量子空间 Q 称为 S 不变的，如果 $P(\sigma)Q \subset Q$ 对每个 $\sigma \in S$ 都成立． $P(\sigma)$ 在 Q 上的收缩 $P_1(\sigma)$ 是 Q 上的一个线性同态，(Q, P_1) 是一 S 模，称为 $(\mathscr{P}, P)$ 的一个子模，若 e 为 $\mathscr{P}$ 的任一向量，$P(\sigma)e$ 模 Q 的剩余类只依赖于 e 的剩余类 e^*．记 $P(\sigma)e$ 的剩余类为 $\Lambda(\sigma)e^*$，则 $\Lambda(\sigma)$ 为 $\mathscr{P}/Q$ 的线性同态，$(\mathscr{P}/Q, \Lambda)$ 为一 S 模．若 $\mathscr{P}$ 为群 G 的表示空间，Q 为一不变子空间，(Q, P_1) 及 $(\mathscr{P}/Q, \Lambda)$ 都是 G 的表示空间．

若 Q 为正维数的 S 模 $(\mathscr{P}, P)$ 的不变子空间，可以选择 $\mathscr{P}$ 的基底 $(e_1, \cdots, e_d)$ 使得 $e_1, \cdots, e_r$ 为 Q 的基底．若 $\sigma \in S$，表示 $P(\sigma)$ 以 $e_1, \cdots, e_d$ 为基底的矩阵形式为

$$\tilde{P}(\sigma) = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1(\sigma) & N(\sigma) \\ 0 & \tilde{\Lambda}(\sigma) \end{pmatrix},$$

此处 $\tilde{P}_1(\sigma)$ 与 $\tilde{\Lambda}(\sigma)$ 分别为阶为 r 及 $d-r$ 的矩阵，$N(\sigma)$ 为 $r \times (d-r)$ 矩阵．矩阵 $\tilde{P}_1(\sigma)$ 代表在 Q 上的收缩表示 P_1(Q 以 $\{e_1, \cdots, e_r\}$ 为基底)；矩阵 $\tilde{\Lambda}(\sigma)$ 代表 $P(\sigma)$ 在 $\mathscr{P}/Q$ 上诱导出的同态($\mathscr{P}/Q$ 以剩余类 $e_{r+1}, \cdots, e_d$ 为基底)．

若 $\mathscr{P}, Q, \mathscr{R}$ 为一 S 模的三个不变子空间，有如下的 Noether 定理：

I. $\mathscr{P} + Q$ 及 $\mathscr{P} \cap Q$ 均为不变子空间，且 $(\mathscr{P} + Q)/Q$ 同构

于 $\mathscr{P}/(\mathscr{P}\cap Q)$.

II. 若 $\mathscr{R}\subset Q\subset\mathscr{P}$, 则 Q/R 为 $\mathscr{P}/\mathscr{R}$ 的不变子空间，$\mathscr{P}/Q$ 同构于 $(\mathscr{P}/\mathscr{R})/(Q/\mathscr{R})$.

定义 1 一个 S 模 $\mathscr{P}$ 称为单的，若其维数 >0, 且 $\mathscr{P}$ 的不变子空间只有 $\{0\}$ 及 $\mathscr{P}$.

这定义包含了群 G 的单表示空间的定义，这样一个表示空间常常称为不可约的，G 的相应的表示称为单的或不可约的. 群 G 的一矩阵表示称为单的或不可约的，若它的抽象形式是单的.

定义 2 一个 S 模称为半单的，若它能表为单子模的和.

一向量空间的子空间的集合 $\{Q_\alpha\}$ 的和是由形如 $\sum_\alpha e_\alpha$ 的向量 $(e_\alpha\in Q_\alpha)$ 所组成，和号中只有有限个 $e_\alpha\neq 0$, 显然一个 S 模的不变子空间的和仍为不变子空间.

零维的 S 模考虑为半单的，这样一个模看成和 $\sum_{\alpha\in A}Q_\alpha$ 时，A 为空集.

命题 1 一个半单 S 模可以表为单子模的有限集合 $\Phi=\{Q_i\}$ 的元素的直和：$\mathscr{P}=\sum_{i=1}^{h}Q_i$, 若我们有这样的表示，且 Q 为 $\mathscr{P}$ 的任意不变子空间，则存在 Φ 的子集合 Φ_0, 使得 $\mathscr{P}$ 为 Q 与属于 Φ_0 的子模的直和.

证 由假设，$\mathscr{P}$ 为(有限或无限个)单子模的集合 Ψ 之和，取 $\mathscr{P}$ 的一组基底，基底中任一元素可表为属于集合 Ψ 中的子模的向量之和. 这样，$\mathscr{P}$ 只能表为子模的有限集合 Ψ_1 的和. 在所有能将 $\mathscr{P}$ 表为子模之和的有限子集合 Ψ 中，选择一个具有最少元素的，例如为 Φ, 若 $Q_1,\cdots,Q_h$ 为 Φ 中的不同的元素，则 $\mathscr{P}=\sum_{i=1}^{h}Q_i$. 现在来证这个和是直和. 事实上，若有关系式 $f_1+\cdots+f_h=0$, $f_i\in Q_i(1\leqslant i\leqslant h)$. 于是 $f_1\in Q_1\cap(Q_2+\cdots+Q_h)$. 而 $Q_1\cap(Q_2+\cdots+Q_h)$ 为 Q 的不变子空间，若 $Q_1\cap(Q_2+\cdots+Q_h)=Q_1$, 则 Q_1 是包在 $Q_2+\cdots+Q_h$ 中，则 $Q_2+\cdots+Q_h$ 等于 $\mathscr{P}$, 这与 Φ 的选择相矛盾. 由于 Q_1 是单的，故 $Q_1\cap(Q_2+$

$\cdots + Q_h) = \{0\}$，即 $f_1 = 0$，同样可证 $f_i = 0 (1 \leqslant i \leqslant h)$.

若 Q 为 $\mathscr{P}$ 的任一不变子空间. 考虑 Φ 的有如下性质的子集 Φ'：$\mathscr{P}$ 为 Q 与 Φ' 的和(例 2 取 Φ' 为 Φ 即有此性质)，在所有这些子集中，选择有最少个数元素的，例如 Φ_0，若 $Q_{i_1}, \cdots, Q_{i_p}$ 为 Φ_0 的元素，与上面相同的办法，可证 $\mathscr{P}$ 为 Q，$Q_{i_1}, \cdots, Q_{i_p}$ 的直和。

命题 2 若 $\mathscr{P}$ 为具有如下性质的 S 模：若 Q 为 $\mathscr{P}$ 的任一不变子空间，则存在一不变子空间 Q'，使得 $\mathscr{P}$ 为 Q 与 Q' 的直和，那么这样的 $\mathscr{P}$ 是半单的.

证 若 $\mathscr{P}_1$ 为 $\mathscr{P}$ 的所有单子模之和，由假设 $\mathscr{P}$ 为 $\mathscr{P}_1$ 及另一不变子空间 R 之直和，若 $\dim R > 0$，R 必包有某单子模(例如 R 中最低维数的不变子空间，即为 R 的单子模). 但任意单子模都包在 $\mathscr{P}_1$ 中且 $\mathscr{P}_1 \cap R = \{0\}$. 故矛盾，所以 $R = \{0\}$，$\mathscr{P} = \mathscr{P}_1$。

命题 3 若 $\mathscr{P}$ 为一半单 S 模，且 $\mathscr{P} = Q_1 + \cdots + Q_h = Q'_1 + \cdots + Q'_{h'}$ 为其单 S 模直和的二种表示法，则 $h = h'$，并且存在 $\{1, \cdots, h\}$ 的一种排列，使 Q_i 与 $Q'_{\varpi(i)} (1 \leqslant i \leqslant h)$ 彼此同构，

证 我们构造排列 ϖ. 若 $\varpi(i)$ 当 $i < k (k \leqslant h)$ 时已定义好，且有如下的性质：a) $\varpi(i) \neq \varpi(j)$ 当 $i < j < k$；b) 当 $i > k$ 时，$Q'_{\varpi(i)}$ 与 Q_i 彼此同构；c) 有

$$\mathscr{P} = \sum_{i<k} Q'_{\varpi(i)} + \sum_{i \geqslant k} Q_i.$$

考虑不变子空间

$$Q = \sum_{i<k} Q'_{\varpi(i)} + \sum_{i>k} Q_i,$$

由命题 1，存在一个由某些 Q'_j 的直和所组成的不变子空间 Q'，使得 $\mathscr{P}$ 为 Q 与 Q' 的直和，于是 Q' 与 $\mathscr{P}/Q$ 同构，即与 Q_k 相同构，所以 Q' 为单的，故 Q' 为 Q'_j 中的某一个，例如为 Q'_{j_0}. 即 $Q' = Q'_{j_0}$. 由于 $Q'_{\varpi(i)} \subset Q$ 当 $i < k$ 时，所以 $j_0 \neq \varpi(i)$ 当 $i < k$ 时. 定

义 i_0 为 $\varpi(k)$. 显然这样就定义好了 $\varpi(i)$ $(i < k+1)$, 它是满足上述条件 a), b), c) 的(以 $k+1$ 代替 k).

由于我们能在 $\{1, \cdots, h\}$ 上定义单值函数 ϖ, 故 $h' \geqslant h$; 同样可有 $h' \leqslant h$, 故有 $h = h'$, 证毕.

若 $\mathscr{P}$ 为群 G 的一个半单表示 P 的表示空间, A 为 G 的不可约表示. 若我们能分解 $\mathscr{P}$ 为一些单子空间的直和,计算那些能导出与表示 A 相等价的表示的子空间的个数. 由命题 3, 这个个数与 $\mathscr{P}$ 的分解无关,称这个个数为在表示 P 中的表示 A 的次数.

命题 4 若 $(\mathscr{P}, P)$ 为在一代数封闭域 K 上的单子模,若所有的同态 $P(\sigma)$ $(\sigma \in S)$ 可交换,则 $\mathscr{P}$ 为一维的.

证 若 σ 为 S 中任一元素, 由于 K 为代数封闭的, 故存在 $u \in K$ 及一向量 $e \neq 0$, 使得 $P(\sigma)e = ue$ 成立, 若 Q 为满足这些条件的向量的集合, 则 Q 为 $\mathscr{P}$ 的一向量子空间, 若 $\tau \in S$, $e \in Q$, 我们有 $P(\sigma)P(\tau)e = P(\tau)P(\sigma)e = uP(\tau)e$, 即 $P(\tau)e \in Q$, Q 为不变子空间, 由于 $\mathscr{P}$ 是单的, 故 $Q = \mathscr{P}$, 换言之, 对每个 $\sigma \in S$, 存在一元素 $u(\sigma) \in K$, 使得对每个 $e \in \mathscr{P}$, $P(\sigma)e = u(\sigma)e$ 都成立, 所以 $\mathscr{P}$ 的任意向量子空间均为不变的. 由于 $\mathscr{P}$ 为单的, 故必须与由任意向量 $e \neq 0$ 所生成的子空间相重合,故 $\dim \mathscr{P} = 1$.

2. 紧致李群的表示

若 G 为拓扑群. G 的一个矩阵表示为 G 到 $GL(n; \mathrm{C})$ (复表示)或 $GL(n; \mathrm{R})$ (实表示)的一个连续同态.

定理 1 紧致李群的任何实表示等价于正交矩阵的表示, 任何复表示等价于酉矩阵的表示.

证 由紧致李群 G 的复表示 $P(\sigma)$, 记

$$\alpha_1(\sigma) = \overline{P(\sigma)}' P(\sigma)$$

这里"′"表示转置, 显然 $\alpha_1(\sigma)$ 为 Hermite 定正的, $\alpha_1(\sigma)$ 的系数是 $\sigma \in G$ 的连续函数,不妨将积分正规化为 $\int_G 1 \cdot d\sigma = 1$. 记

$$\alpha_1 = \int_G \alpha_1(\sigma) d\sigma$$

(即，α_1 的系数为 $\alpha_1(\sigma)$ 的系数在 G 上的积分)，由于 $\alpha_1(\sigma)'=\bar{\alpha}_1(\sigma)$ 对每个 σ 都成立，故 $\alpha_1'=\bar{\alpha}_1$，即 α_1 为 Hermite. 若 a 为 C^n (n 为表示的维数)中任意非零向量，我们有

$$\bar{a}'\alpha_1 a=\int_G \bar{a}'\alpha_1(\sigma)a d\sigma,$$

由于 $\alpha_1(\sigma)$ 对意 σ 是正定的，故 $\bar{a}'\alpha_1(\sigma)a>0$. 所以 $\bar{a}'\alpha_1 a>0$. 这证明了 α_1 为正定的. 因此 α_1 为一定正的 Hermite 矩阵.

若 τ 为 G 中任何元素，由群上积分的不变性，我们有

$$\overline{P(\tau)}'\alpha_1 P(\tau)=\int_G \overline{P(\tau)}'\,\overline{P(\sigma)}'\,P(\sigma)P(\tau)d\tau$$

$$=\int_G \overline{P(\sigma\tau)}'\,P(\sigma\tau)d\sigma=\int_G \overline{P(\sigma)}'\,P(\sigma)d\sigma=\alpha_1.$$

由于正定 Hermite 矩阵 α_1 可写为 α^2，这里 α 也是正定 Hermite 矩阵，记 $P_1(\tau)=\alpha P(\tau)\alpha^{-1}$，由于 $\bar{\alpha}'\alpha=\alpha^2=\alpha_1$ 及 $\overline{P(\tau)}'\alpha_1 P(\tau)=\alpha_1$，故

$$\overline{(\alpha P(\tau)\alpha^{-1})}'\alpha P(\tau)\alpha^{-1}=I,$$

也就是 $\alpha P(\tau)\alpha^{-1}$ 是一酉表示.

若 P 为实表示，则 α_1 为实矩阵，并可设 α 为实的. 于是 $\alpha P(\tau)\cdot\alpha^{-1}$ 为实的酉矩阵，即正交矩阵.

系 紧致李群的每个表示都是半单的.

证 由定理 1，我们只讨论紧致李群 G 的矩阵表示 P 为酉矩阵或正交矩阵的情形.

在复的情形，考虑表示空间为 C^n. 若 $\mathscr{P}$ 为任意不变子空间，对所有的 $e\in\mathscr{P}$，使 $\bar{e}'f=0$ 成立的向量 f 组成 C^n 的向量子空间，若 $f\in\mathscr{P}'$，则

$$\bar{e}'P(\sigma)f=\overline{(\overline{P(\sigma)}'e)}'f=\overline{(P(\sigma^{-1})e)}'f=0$$

对所有 $e\in\mathscr{P}$，$\sigma\in G$ 都成立. 故 $\mathscr{P}'$ 为 C^n 中的一不变子空间.

由于 $\bar{e}'e=0$ 导出 $e=0$，故 $\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'=\{0\}$.

若 $\{e_1,\cdots,e_d\}$ 为 $\mathscr{P}$ 的基底，向量 $f\in\mathscr{P}'$ 是由 d 个线性齐次方程 $\bar{f}'e_i=0$ $(1\leqslant i\leqslant d)$ 的解张成，故 $\mathscr{P}'$ 的维数至少为 $n-d$. 由于 $\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'=\{0\}$，故 $\mathscr{P}+\mathscr{P}'$ 的维数至少为 $d+$

$(n-d)=n$，故 $\mathscr{P}+\mathscr{P}'=\mathbf{C}^n$。由上节命题 2，即得系。

3. 紧致李群表示的运算

1) 星运算

若 φ 为在域 K 上的向量空间 $\mathscr{P}$ 的自同态．$\mathscr{P}'$ 为 $\mathscr{P}$ 的对偶空间(即 $\mathscr{P}$ 上取值在 K 的线性函数空间)．若 λ 为 $\mathscr{P}'$ 中任意元素，定义 $\mathscr{P}'$ 中的元素 $\varphi'(\lambda)$ 为：对每个 $e\in\mathscr{P}$，$\varphi'(\lambda)(e)=\lambda(\varphi e)$．显然 φ' 为 $\mathscr{P}'$ 中的一个自同态，有

$$(\varphi_1\circ\varphi_2)'=\varphi_2'\circ\varphi_1'.$$

若 $\{e_1,\cdots,e_d\}$ 为 $\mathscr{P}$ 的基底，对应于这组基底，有 $\mathscr{P}'$ 的对偶基底 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_d\}$ 使得 $\lambda_i(e_j)=\delta_{ij}\ (1\leqslant i,j\leqslant d)$，若同态 φ 相对于基底 $\{e_1,\cdots,e_d\}$ 的矩阵为 α，则 φ' 的相对于基底 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_d\}$ 的矩阵为 α'。

若 $(\mathscr{P},P)$ 为群 G 的表示空间，$P(\sigma\tau)'=P(\tau)'\circ P(\sigma)'$ 表明 P' 一般来说不是 G 的表示．但 $\sigma\to P(\sigma^{-1})'$ 是一个表示．若 $\tilde{P}$ 为 P 的矩阵形式，$\sigma\to(\tilde{P}(\sigma))^*$ 为表示 $\sigma\to(P(\sigma^{-1}))'$ 的矩阵形式。

定义 1　若 P 为群 G 的一抽象表示，映射 $\sigma\to P(\sigma^{-1})'$．称为表示 P 的星，记作 P^*．若 P 为 G 的矩阵表示，映射 $\sigma\to(P(\sigma))^*$ 称为 P 的星表示，记作 P^*。

命题 1　若 P 为群 G 的酉矩阵表示，则 P^* 即为 P 的共轭 $\bar{P}$；若 P 为群 G 的正交矩阵表示，则 $P^*=P$。

这可由定义立得。

另一方面，对任意矩阵表示 P 有 $(P^*)^*=P$。

2) 表示的加法

若 $(\mathscr{P}_1,P_1)$ 与 $(\mathscr{P}_2,P_2)$ 为群 G 的表示空间，作 $\mathscr{P}_1$、$\mathscr{P}_2$ 的乘积 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$，对每个 $\sigma\in G$，作 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 的同态 $P(\sigma)$：

$P(\sigma)(e_1,e_2)=(P_1(\sigma)e_1,P_2(\sigma)e_2)(e_i\in\mathscr{P}_i,i=1,2)$ 显然 P 为 G 的表示．称 P 为表示 P_1 与 P_2 之和记作 $P=P_1\dotplus P_2$。

命 $\{e_{m1},\cdots,e_{md_m}\}$ 为 $\mathscr{P}_m(m=1,2)$ 的基底．(a_{ij}) 与 (b_{kl})

为表示 $P_1(\sigma)$ 与 $P_2(\sigma)$ 相对于这些基底的矩阵．于是 $f_1=(e_{11},0)$, $\cdots$, $f_{d_1}=(e_{1d_1},0)$, $f_{d_1+1}=(0,e_{21})$, $\cdots f_{d_1+d_2}=(0,e_{2d_2})$ 组成 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 的基底，相对于这组基底，$P(\sigma)$的矩阵为

$$\begin{pmatrix}(a_{ij}) & 0\\ 0 & (b_{kl})\end{pmatrix}.$$

这就导出如下的定义：若 α,β 为阶 d_1 与 d_2 的方阵，记 $\alpha\dotplus\beta$ 为 d_1+d_2 阶方阵

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}.$$

若 P_1, P_2 为 G 的矩阵表示，记 $P_1\dotplus P_2$ 为矩阵表示，使得对每个 $\sigma\in G$，其矩阵为 $P_1(\sigma)\dotplus P_2(\sigma)$．若 P_1, P_2, P_3 为 G 的三个矩阵表示，则

$$(P_1\dotplus P_2)\dotplus P_3=P_1\dotplus(P_2\dotplus P_3) \text{ 及 } (P_1\dotplus P_2)^*=P_1^*\dotplus P_2^*$$

成立，若 P_1, P_2, P_3 为抽象表示，则上式是等价关系而不是相等．

若 P_1 与 P_2 为抽象表示或矩阵表示，则 $P_2\dotplus P_1$ 等价于 $P_1\dotplus P_2$，事实上，若 P_1 与 P_2 为抽象表示，$(\mathscr{P}_1,P_1)$ 与 $(\mathscr{P}_2,P_2)$ 为其表示空间，则 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 到 $\mathscr{P}_2\times\mathscr{P}_1$ 的线性同构 $(e_1,e_2)\to(e_2,e_1)$ 为 $(\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2,P_1\dotplus P_2)$ 到 $(\mathscr{P}_2\times\mathscr{P}_1,P_2\dotplus P_1)$ 的同构．

3) Kronecker 乘积

若 $(\mathscr{P}_1,P_1)$ 与 $(\mathscr{P}_2,P_2)$ 为群 G 的表示空间，$\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 上的在 K 中取值的双线性函数所成的线性空间．若 $\varphi_i(i=1,2)$ 为 $\mathscr{P}_i$ 的线性同态，对每个 $B\in\mathscr{B}$，双线性形式 $\phi(B)$ 定义为

$$\phi(B)(e_1,e_2)=B(\varphi_1e_1,\varphi_2e_2)\quad(e_i\in\mathscr{P}_i, i=1,2).$$

这样就得到 $\mathscr{B}$ 上的一个线性同态，称 ϕ 为对应于 (φ_1,φ_2)的 $\mathscr{B}$ 的线性同态．若 θ_i 为 $\mathscr{P}_i(i=1,2)$ 的另一同态，π 为对应于对 (θ_1,θ_2) 的 $\mathscr{B}$ 的线性同态，则易见对应于对 $(\varphi_1\circ\theta_1,\varphi_2\circ\theta_2)$ 的线性同态为 $\pi\circ\phi$，为了抵消反向，考虑 $\mathscr{B}$ 的对偶空间 $\mathscr{B}'$ 的同态 $(\pi\circ\phi)'=\phi'\circ\pi'$.

定义 2 若 $\mathscr{P}_1$ 和 $\mathscr{P}_2$ 为域 K 上的向量空间．在 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 上的双线性函数空间的对偶空间称为 $\mathscr{P}_1$ 与 $\mathscr{P}_2$ 的 Kronecker 乘积，

记作 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$.

若 e_i 为 $\mathscr{P}_i(i=1,2)$ 的元素．则每一对 (e_1,e_2)，对应于 $\mathscr{B}$ 上的一线性函数，使得对每个 $B\in\mathscr{B}$，取值 $B(e_1,e_2)$．但 $\mathscr{B}$ 上的一线性函数为 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 中的一元素，故有映射将 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 映到 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$．记与 (e_1,e_2) 相对应的 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 中的元素为 $e_1\times e_2$.

映射 $(e_1,e_2)\to e_1\times e_2$ 不是 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 到 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 的线性映射，但是双线性的，即

$$\begin{aligned}(ae_1+a'e_1')\times e_2&=ae_1\times e_2+a'e_1'\times e_2,\\ e_1\times(ae_2+a'e_2')&=ae_1\times e_2+a'e_1\times e_2'\end{aligned}\quad\begin{pmatrix}e_i,e_i'\in\mathscr{P}_i\\ a,a'\in K\end{pmatrix}.$$

若 φ_i 为 $\mathscr{P}_i(i=1,2)$ 的线性同态，$\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 的线性同态 ϕ' 映 $e_1\times e_2$ 为

$$\phi'(e_1\times e_2)=\varphi_1e_1\times\varphi_2e_2,$$

记 ϕ' 为 $\varphi_1\times\varphi_2$.

若 $(\mathscr{P}_1,P_1)$ 与 $(\mathscr{P}_2,P_2)$ 为群 G 的表示空间，则 $\sigma\to P_1(\sigma)\times P_2(\sigma)$ 仍为 G 的表示．这表示称为表示 P_1 与 P_2 的 Kronecker 乘积，记作 $P_1\times P_2$.

若 $\{e_{m1},\cdots,e_{md_m}\}$ 为 $\mathscr{P}_m(m=1,2)$ 的基底，则 d_1d_2 个元素 $e_{1i}\times e_{2j}(1\leqslant i\leqslant d_1,1\leqslant j\leqslant d_2)$ 组成 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 的基底，事实上，由于 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 与 $\mathscr{B}$ 有相同的维数，即 d_1d_2，所以只要证 $e_{1i}\times e_{2j}$ 为线性独立的．若 $\sum\limits_{i,j}a_{ij}e_{1i}\times e_{2j}=0,a_{ij}\in K$，则 $\sum\limits_{i,j}a_{ij}B(e_{1i},e_{2j})=0$．对每个 $B\in\mathscr{B}$ 成立，对每一对 (i,j) 存在一双线性函数 B_{ij} 使得 $B_{ij}(e_{1k},e_{2l})=\delta_{ik}\delta_{jl}$，若取 $B=B_{ij}$，则得 $a_{ij}=0$．故 $e_{1i}\times e_{2j}(1\leqslant i\leqslant d_1,1\leqslant j\leqslant d_2)$ 组成 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 的基底.

若 φ_i 为 $\mathscr{P}_i(i=1,2)$ 的线性同态，且

$$\varphi_1e_{1i}=\sum_{k=1}^{d_1}a_{ki}e_{1k},\qquad \varphi_2e_{2j}=\sum_{l=1}^{d_2}b_{lj}e_{2l}.$$

于是

$$(\varphi_1\times\varphi_2)(e_{1i}\times e_{2j})=\sum_{k,l}a_{ki}b_{lj}e_{1k}\times e_{2l}.$$

若令 $f_{i+d_1(j-1)}=e_{1i}\times e_{2j}$，则有

$$(\varphi_1\times\varphi_2)f_r=\sum_{s=1}^{d_1d_2}C_{sr}f_s$$

而

$$C_{i+d_1(j-1),k+d_1(l-1)}=a_{ik}b_{jl}. \tag{1}$$

这导出如下的

定义3 若 $\alpha=(a_{ik})$，$\beta=(b_{jl})$ 为 d_1，d_2 阶矩阵. 以 $\alpha\times\beta$（称为 α 与 β 的 Kronecker 乘积）表示 d_1d_2 阶矩阵 (C_{rs})，其系数由(1)式给出。若 P_1，P_2 为群 G 的矩阵表示，称 P_1 与 P_2 的 Kronecker 乘积为表示 $P_1\times P_2$，对每个 $\sigma\in G$，对应矩阵为 $P_1(\sigma)\times P_2(\sigma)$.

由上面讨论知道，若 α 与 β 为 d_1 阶矩阵，α' 与 β' 为 d_2 阶矩阵，则

$$(\alpha\beta)\times(\alpha'\beta')=(\alpha\times\alpha')(\beta\times\beta'),$$

另一方面，$(\alpha\times\beta)'=\alpha'\times\beta'$. 故若 α，β 为正则矩阵，则 $(\alpha\times\beta)^*=\alpha^*\times\beta^*$. 由于 $(\alpha^*)^*=\alpha$，故 $(\alpha\times\beta^*)^*=\alpha^*\times\beta$. 易知 $\alpha\times(\beta_1+\beta_2)=\alpha\times\beta_1+\alpha\times\beta_2$.

若 P_1，P_2，P_3 为群 G 的抽象表示，则 $(P_1\times P_2)^*$ 等价于 $P_1^*\times P_2^*$，$P_1\times(P_2\dot{+}P_3)$ 等价于 $P_1\times P_2\dot{+}P_1\times P_3$，若 P_1，P_2 用等价表示代替，则 $P_1\times P_2$ 也是.

由于 $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$ 不成立，故表示 $P_1\times P_2$ 不再等价于 $P_2\times P_1$，若将 $e_1\times e_2(e_i\in\mathscr{P}_i,i=1,2)$ 映到 $e_2\times e_1$，这二个表示空间是同构的. $(P_1\dot{+}P_2)\times P_3$ 等价于 $P_1\times P_3\dot{+}P_2\times P_3$. 同样可证 $(P_1\times P_2)\times P_3$ 等价于 $P_1\times(P_2\times P_3)$.

4) 表示 $P_1\times P_2^*$

若 P_1，P_2 为群 G 的 d_1 阶及 d_2 阶矩阵表示. Q 为所有 d_1 行 d_2 列矩阵所成的 d_1d_2 维的向量空间，对每个元素 $\sigma\in G$，Q 的同态 A_σ 映射任一矩阵 $\alpha\in Q$ 到 $A_\sigma\alpha=P_1(\sigma)\alpha P_2(\sigma^{-1})$. 易于验证 $A_{\sigma\tau}=$

$A_\sigma \circ A_\tau (\sigma, \tau \in G)$，$A_\epsilon$ 为 Q 的单位映射，ϵ 为 G 的单位元，于是 $\sigma \to A_\sigma$ 为 G 的一抽象表示 A。要证 A 为表示 $P_1 \times P_2^*$ 的抽象形式。

记 $\alpha_{i+d_1(j-1)}$ 为 Q 的矩阵，其 i 行 j 列处有元素 1，其余全为零，$d_1 d_2$ 个元素 $\alpha_{i+d_1(j-1)}$ $(1 \leqslant i \leqslant d_1,\ 1 \leqslant j \leqslant d_2)$ 组成 Q 的基底。易知

$$P_1(\sigma)\alpha_{i+d_1(j-1)}P_2(\sigma^{-1}) = \sum_{k,l} a_{ki}(\sigma) b_{jl}(\sigma^{-1}) \alpha_{k+d_1(l-1)}$$

这里 $(a_{ki}(\sigma))$，$(b_{jl}(\sigma))$ 为矩阵 $P_1(\sigma)$ 与 $P_2(\sigma)$。令 $P_2^*(\sigma) = (b_{jl}^*(\sigma))$，则 $b_{jl}^*(\sigma) = b_{lj}(\sigma^{-1})$。故当 Q 这样选择基底后，A 的矩阵形式为 $P_1 \times P_2^*$。这就证明了要证的结论。

若 $\tilde{P}_i$ 为 $P_i (i = 1, 2)$ 的抽象形式，$(\mathscr{P}_i, \tilde{P}_i)$ 为 $\tilde{P}_i$ 的表示空间，空间 Q 为 $\mathscr{P}_2$ 到 $\mathscr{P}_1$ 的线性映射，由此观点，A_σ 可看成 Q 的同态，对每个 $\alpha \in Q$，映射 $A_\sigma(\alpha)$ 定义为

$$A_\sigma(\alpha)(e_2) = (P_1(\sigma) \circ \alpha \circ P_2(\sigma^{-1}))e_2 \qquad (e_2 \in \mathscr{P}_2)$$

由此也易证 A 等价于 $P_1 \times P_2^*$。

4. Schur 引理

命题 1 (Schur 引理)若 P_1，P_2 为群 G 的在域 K 上的二个不可约矩阵表示，其阶为 d_1 与 d_2，P_1 与 P_2 等阶的充要条件为存在一个系数在 K 中的 d_1 行 d_2 列的长方矩阵 $\alpha \neq 0$，使得对每个 $\sigma \in G$，$P_1(\sigma)\alpha = \alpha P_2(\sigma)$ 成立。

证 若 P_1 与 P_2 等价，则 $d_1 = d_2$ 及存在一正则矩阵 r，使得 $P_2(\sigma) = r^{-1}P_1(\sigma)r$，故 $P_1(\sigma)r = rP_2(\sigma)$。

反之，若存在一矩阵 $\alpha \neq 0$，使得对每个 $\sigma \in G$，有 $P_1(\sigma)\alpha = \alpha P_2(\sigma)$，作 P_1，P_2 的表示空间 $\mathscr{P}_1$ 与 $\mathscr{P}_2$，α 可看作将 $\mathscr{P}_2$ 映入到 $\mathscr{P}_1$ 中的一个线性映射，若 Q_1 为 $\mathscr{P}_2$ 的象，由于 $\alpha \neq 0$，故 $Q_1 \neq \{0\}$。由于 $P_1(\sigma)\alpha = \alpha P_2(\sigma)$，得出 Q_1 为 $\mathscr{P}_1$ 的不变子空间，由于 $\mathscr{P}_1$ 为不可约的，故 $Q_1 = \mathscr{P}_1$，若 Q_2 为 $\mathscr{P}_2$ 中的向量集合，在映射 α 之下，其象为 0，同样可证 Q_2 为 $\mathscr{P}_2$ 的不变子空间，由于 $Q_2 \neq \mathscr{P}_2$，故 $Q_2 = \{0\}$，故 α 将 $\mathscr{P}_2$ 映到 $\mathscr{P}_1$ 上的一一对应的映射，故

$d_1 = d_2$，因此 α 为行列式 $\neq 0$ 的方阵，故可写为 $P_2(\sigma) = \alpha P_1(\sigma)\alpha^{-1}$，这表明 P_1 与 P_2 等价，Schur 引理得证.

若 P 为群 G 的 d 阶不可约矩阵表示，对所有 $\sigma \in G$，使 $P(\sigma)\alpha = \alpha P(\sigma)$ 成立的矩阵 α 组成一代数 O(即，若 α_1，α_2 为满足上述条件的矩阵，则 $\alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha_1\alpha_2$ 及 $a\alpha_1$ ($a \in K$) 都满足上述条件). 由 Schur 引理的证明(此时 $P_1 = P_2 = P$)可看出，每个在 O 中的 $\alpha(\neq 0)$ 有逆 α^{-1}. 显然 α^{-1} 也属于 O，故 O 为一可除代数.

若 r 为 O 中任意 $\neq 0$ 的一元素，O 中的元素能表为系数在 K 中的，r 的有理函数 $R(r)$ 者的集合，记作 Z. 显然 Z 为 K 的扩域，且为有限阶的(因为 Z 包含在以 K 为系数的所有 d 阶矩阵组成的环中)，于是若 K 为代数封闭的，则 $Z = K$，这表示 r 为 aI，$a \in K$ 的形式，于是有

命题 2 若 P 为群 G 的在代数封闭域 K 上的不可约表示，与所有矩阵 $P(\sigma)$，$\sigma \in G$ 可同时交换的矩阵只有常数乘以单位矩阵.

命题 3 若 A 与 P 为群 G 的在代数封闭域 K 上的二个表示，P 为不可约的，若 A 与 $A \times P^*$ 为半单的，则在 A 中包有 P 的次数等于 $A \times P^*$ 中单位表示的个数.

群 G 的单位表示是指对每个 $\sigma \in G$，表示为 1 (看作一维矩阵)，此表示的抽象形式有一维的表示空间 e，对每个 $\sigma \in G$，恒等映射将 e 映为自己.

若 M 为 G 在 K 中的半单表示，其表示空间分解为不可约子空间的直和，$m = m_1 + \cdots + m_h$. 若 $m_1, \cdots, m_n$ 为与单位表示的空间 e 相同构的那些项 (n 为满足 $0 \leqslant n \leqslant h$ 的整数). 则每个 $m_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ 是由一向量 $e_i(\neq 0)$ 张成，使得对每个 $\sigma \in G$，$M(\sigma)e_i = e_i$. 反之，若 f 为对每个 $\sigma \in G$ 都满足 $M(\sigma)f = f$ 的向量. 若 $f = \sum_1^h f_i$，$f_i \in m_i$，于是 $\Sigma f_i = \Sigma M(\sigma)f_i$，但 $M(\sigma)f_i \in m_i$，由于空间 m_i 之和为直和，故 $M(\sigma)f_i = f_i (1 \leqslant i \leqslant h)$. 若 $i > n$，则 m_i 不能有向量 $f_i \neq 0$ 具有此性质，故 f 为 $e_1, \cdots, e_n$ 的线性组合. 故在 M 中单位表示的个数等于 m 中满足 $M(\sigma)e = e$ (对每个

$\sigma \in G$) 的线性独立向量 e 的个数。

现在来证明命题。

若 A 等价于不可约表示的和 $A_1 \dotplus \cdots \dotplus A_K$，$A \times P^*$ 等价于 $A_1 \times P^* \dotplus \cdots \dotplus A_K \times P^*$. 故只要证明当 A 本身为不可约时命题 3 成立即可.

将 P 的表示空间 $\mathscr{P}$ 映入到 A 的表示空间 L 的所有线性映射 $\mathcal{A}$ 组成的空间可以看作为 $A \times P^*$ 的表示空间，对于每个 $\sigma \in G$，表示 $A \times P^*$ 为映射 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\sigma = (A(\sigma))\mathcal{A}(P(\sigma))^{-1}$. 如果对所有的 σ，有 $\mathcal{A}^\sigma = \mathcal{A}$，则 $A(\sigma)\mathcal{A} = \mathcal{A}P(\sigma)$，则由 Schur 引理，对 $\mathcal{A} \neq 0$，这只能发生在 A 与 P 等价时，而由命题 2，对所有的 $\sigma \in G$，使 $\mathcal{A}^\sigma = \mathcal{A}$ 都成立的 $\mathcal{A}$，只能是常数乘单位矩阵，故当 A 不等价于 P 时，$A \times P^*$ 中不包有单位表示，当 A 与 P 等价时，$A \times P^*$ 正好包有一次.

5. 正交关系

若 G 为一紧致李群，M 为 G 在复数域上的矩阵表示，我们将给出如何计算包含在 M 中的单位表示 I 的个数。

不妨设 $\int_G 1 \cdot d\sigma = 1$. 记 $M_0 = \int_G M(\sigma) d\sigma$. 将 M 看成一抽象表示的矩阵形式. 这抽象表示仍记作 M. 若 m 为其表示空间，我们选取 $\{e_1, \cdots, e_d\}$ 为 m 的基底，使得以此为基底得出的矩阵表示就是 M. 若 $e \in m$，要证 $M(\sigma)M_0 e = M_0 e$ 对每个 $\sigma \in G$ 都成立. 事实上，令 $M(\tau)e = \sum_{i=1}^{d} u_i(\tau) e_i$，$M(\sigma) = (m_{ij}(\sigma))$，则

$$M_0 e = \sum_i \left(\int_G u_i(\tau) d\tau \right) e_i,$$

$$M(\sigma) M_0 e = \sum_i \left(\int_G u_i(\tau) d\tau \right) M(\sigma) e_i$$

$$= \sum_{i,j} \int_G m_{ji}(\sigma) u_i(\tau) d\tau e_j,$$

但

$$\sum_{i,j} m_{ji}(\sigma)u_i(\tau)e_j = M(\sigma)M(\tau)e$$

$$= M(\sigma\tau)e = \sum_i u_i(\sigma\tau)e_i.$$

由于

$$\int_G u_i(\sigma\tau)d\tau = \int_G u_i(\tau)d\tau,$$

故得 $M(\sigma)M_0e = M_0e$.

反之，若对每个 $\sigma\in G$，f 使 $M(\sigma)f=f$ 都成立，则 $M_0f=f$. 故对每个 $\sigma\in G$ 使 $M(\sigma)f=f$ 的 f 为形如 $M_0e(e\in m)$ 的形式，即包在 M 中单位表示的次数等于矩阵 M_0 的秩。

若 A 与 P 为 G 的在复数域中的二个不可约表示．命

$$M(\sigma)=A(\sigma)\times P^*(\sigma),$$

$$M_0=\int_G M(\sigma)d\sigma.$$

所以如果 A 与 P 不等价，则 M 中不包有单位表示 I；若 A 与 P 等价，则 M 包有 I 恰好一次．因此，在第一种情形，M_0 为零矩阵，在第二种情形 M_0 为秩 1 的矩阵．

$M(\sigma)$ 的系数为 $A(\sigma)$ 的系数与 $P(\sigma^{-1})$ 的系数相乘得到的．故若 A 与 P 为不等价时，$a(\sigma)$，$b(\sigma)$ 为 $A(\sigma)$ 与 $P(\sigma)$ 的任意系数，则

$$\int_G a(\sigma)b(\sigma^{-1})d\sigma=0.$$

若 A 与 P 等价，不妨设 $A=P$，A 为酉矩阵表示．若 L 为 A 的表示空间，且 $\{e_1,\cdots,e_d\}$ 为 L 的基底给出矩阵表示 A．将 L 映入到自己的线性映射空间 m 看作为 $A\times A^*=M$ 的表示空间．θ_{ij} 为 m 中的元素，映 e_j 到 e_i，$e_{j'}$ 到 0 当 $j'\neq j$．于是，若 $A(\sigma)=(a_{ik}(\sigma))$，则

$$M(\sigma)\theta_{ij}=A(\sigma)\theta_{ij}A(\sigma^{-1})=\sum_{k,l}a_{ki}(\sigma)a_{jl}(\sigma^{-1})\theta_{kl}.$$

若 θ_1 为 L 映到 L 的恒等变换(即 $\theta_1=\sum_i\theta_{ii}$) 我们知道，与

每个 $A(\sigma)$，$\sigma\in G$ 可交换的映射 ξ 为常数乘以 θ_1. 故对每个 $\theta\in m$，$M_0\theta$ 为常数乘以 θ_1. 于是

$$\int_G a_{ki}(\sigma)a_{jl}(\sigma^{-1})d\sigma=\delta_{kl}c_{ij},$$

这里 c_{ij} 为不依赖于 k 的常数. 但对任意在 G 上的连续函数 f，有 $\int_G f(\sigma)d\sigma=\int_G f(\sigma^{-1})d\sigma$，故

$$\int_G a_{jl}(\sigma)a_{ki}(\sigma^{-1})d\sigma=\delta_{kl}c_{ij}.$$

比较这二个式子，就得到 $c_{ij}=\delta_{ij}c$，c 为常数. c 可以这样决定：由于对每个 σ，有 $M(\sigma)\theta_1=\theta_1$，故 $M_0\theta_1=\theta_1$，即 $c=d^{-1}$.

若 A 为酉矩阵表示，则 $a_{jl}(\sigma^{-1})=\bar{a}_{lj}(\sigma)$.

定义 1 若 G 为一紧致李群. G 的不可约酉矩阵表示的系数看作 G 上的函数，称为 G 的单表示函数，任意单表示函数的线性组合称为表示函数.

这样我们已经证明了

定理 2 若 f 与 g 为一紧致李群 G 上的二个单表示函数，若 f，g 为二个不等价的不可约表示的系数，则 $\int_G f(\sigma)g(\sigma^{-1})d\sigma=0$. 若 f，g 为同一个 d 阶的不可约表示的系数，则 $\int_G f(\sigma)g(\sigma^{-1})d\sigma=d^{-1}$，若 $f=g$；$\int_G f(\sigma)g(\sigma)d\sigma=0$，若 $f\neq g$.

6. 特征

定义 1 若 P 为群 G 的矩阵表示. $P(\sigma)$ 的迹看作元素 $\sigma\in G$ 的函数，称为表示 P 的特征.

命题 1 二等价表示有相同的特征，若 σ 与 τ 为 G 的共轭元素，χ 为 G 的任意表示的特征，则 $\chi(\sigma)=\chi(\tau)$.

证 若 α，β 为方阵，α 有逆，tr 表示方阵的迹，则 $\mathrm{tr}\,\alpha\beta\alpha^{-1}=\mathrm{tr}\,\beta$. 由此立得结论.

表示的等价关系可以将所有的表示分为表示类，在每一类中

的表示是相互等价的.

定义 2 群G的一表示类为表示的集合，在其中所有的表示都相互等价的.

由命题 1，对群G的每个表示类，有一G上的函数，即为此类中的任何表示的特征. 这个函数称为类的特征.

若$\mathscr{K}_1$与$\mathscr{K}_2$为群G的在域K上的二表示类，由第三节可知:

1) 表示$P\in\mathscr{K}_1$，其星表示$P^*\in\mathscr{K}_1^*$，$\mathscr{K}_1^*$只依赖于$\mathscr{K}_1$;

2) 表示$P_1\in\mathscr{K}_1$，$P_2\in\mathscr{K}_2$ 则 $P_1\dotplus P_2\in\mathscr{K}_1\dotplus\mathscr{K}_2$，这只依赖与$\mathscr{K}_1$与$\mathscr{K}_2$，且$\mathscr{K}_2\dotplus\mathscr{K}_1=\mathscr{K}_1\dotplus\mathscr{K}_2$;

3) $P_1\times P_2\in\mathscr{K}_1\times\mathscr{K}_2$，这只依赖于$\mathscr{K}_1$，$\mathscr{K}_2$，且$\mathscr{K}_2\times\mathscr{K}_1=\mathscr{K}_1\times\mathscr{K}_2$.

加法运算及 Kronecker 乘法运算对表示类域是结合的，Kronecker 乘法对加法是分配的，但表示类并不成环，因为一般来说，减法是不可能的.

以$\chi_{\mathscr{K}}$记表示类$\mathscr{K}$的特征.

命题 2 若$\mathscr{K}_1$与$\mathscr{K}_2$为二表示类，则

$$\chi_{\mathscr{K}_1+\mathscr{K}_2}=\chi_{\mathscr{K}_1}+\chi_{\mathscr{K}_2};$$
$$\chi_{\mathscr{K}_1\times\mathscr{K}_2}=\chi_{\mathscr{K}_1}\chi_{\mathscr{K}_2}.$$

证 若α,β为矩阵，则 $\operatorname{tr}(\alpha\dotplus\beta)=\operatorname{tr}\alpha+\operatorname{tr}\beta$，$\operatorname{tr}\alpha\times\beta=\operatorname{tr}\alpha\cdot\operatorname{tr}\beta$.

若一表示类有一不可约（或半单）的表示，则此类中每个表示均为不可约(或半单). 称此类为不可约的(或半单).

每个半单类$\mathscr{K}$可以表为$\sum\limits_i x_i\mathscr{K}_i$，$x_i$为非负整数，$\mathscr{K}_i$为不可约类，$x_i$为类$\mathscr{K}_i$的一表示在类$\mathscr{K}$中的一表示中出现的次数，这个数只依赖于$\mathscr{K}$及$\mathscr{K}_i$，称为$\mathscr{K}_i$包在$\mathscr{K}$中的次数.

命题 3 若$\mathscr{K}_1$，$\mathscr{K}_2$为紧致李群G在复数域上的二个不可约表示类，积分

$$\int_G\chi_{\mathscr{K}_1}(\sigma)\overline{\chi}_{\mathscr{K}_2}(\sigma)d\sigma$$

等于0，若 $\mathscr{K}_1 \neq \mathscr{K}_2$；等于1，若 $\mathscr{K}_1 = \mathscr{K}_2$。

证 若 P_i 为类 $\mathscr{K}_i(i=1,2)$ 中的一表示. $\chi_{\mathscr{K}_i}(\sigma)$ 为 $P_i(\sigma)$ 的主对角线上元素之和，由定理2，即得此结论.

系1 紧致李群 G 的不可约表示类 $\mathscr{K}_1$ 在类 $\mathscr{K}$ 中出现的次数为

$$\int_G \chi_{\mathscr{K}}(\sigma)\bar{\chi}_{\mathscr{K}_1}(\sigma)d\sigma.$$

证 若 $\mathscr{K} = \sum_i x_i \mathscr{K}_i$，就有 $\chi_{\mathscr{K}} = \sum_i x_i \chi_{\mathscr{K}_i}$，由命题3即得此结论。

系2 紧致李群的二个表示类相一致当且仅当它们有相同的特征。

证 由系1，二类 $\mathscr{K}$，$\mathscr{K}'$ 有相同的特征，则每个不可约表示类在 $\mathscr{K}$ 与 $\mathscr{K}'$ 中出现相同的次数，这就证明了系2。

7. 表示环

定义1 紧致李群 G 的表示环是由 G 的表示的系数在复数域上生成的环.

换言之，表示环中的元素为 G 上的复值函数，且可表为 G 的表示的系数的多项式.

更一般地，若 ε 为 G 的表示的任意集合，记 $O(\varepsilon)$ 为由 ε 中的表示的系数生成的环.

若 ε_1，ε_2 为二个表示集合，要寻找在什么条件下 $O(\varepsilon_1) = O(\varepsilon_2)$.

称 ε 为闭的．若

1) $P_1 \in \varepsilon$，$P_2 \in \varepsilon$ 则 $P_1 \dotplus P_2 \in \varepsilon$，$P_1 \times P_2 \in \varepsilon$；

2) 若不可约表示 P 是包含在属于 ε 的一表示中，则 $P \in \varepsilon$；

3) 与一属于 ε 的表示相等价的表示也属于 ε。

若 ε_1 为 G 的表示的任意集合，讨论所有包含在表示 $A_1 \times \cdots \times A_h$ $(A_i \in \varepsilon_1, 1 \leqslant i \leqslant h)$ 中的不可约表示组成的集合 $\mathscr{F}$．若

P_1与P_2属于$\mathscr{F}$，则每个包在$P_1 \times P_2$中的不可约表示也属于$\mathscr{F}$。若ε为由与形如$P_1 \dotplus \cdots \dotplus P_k$的表示($P_j \in \mathscr{F}$，$1 \leqslant j \leqslant k$)相等价的表示组成的集合，显然$\varepsilon$为闭的，且为包有$\varepsilon_1$的最小表示闭集，

命题1 若ε_1为G的表示的集合，ε为包有ε_1的最小的表示的闭集，ε中的不可约表示的系数的复系数线性组合的全体成为集合A，则A就是环$O(\varepsilon_1)$。

证 若P为属于ε的任意的不可约表示，则存在$\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k \in \varepsilon_1$，使得$P$是包含在$\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_k$中，即存在一个正则矩阵$r$，使得

$$r(\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_k)r^{-1} = P \dotplus N,$$

这里N为某个表示，$\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_k$中的每个系数为$\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k$的系数的乘积，故属于$O(\varepsilon_1)$．故$P \dotplus N$(特别是$P$)$\in O(\varepsilon_1)$．因此$A \subset O(\varepsilon_1)$。

若Λ为属于ε的任意表示，则Λ的系数属于A．事实上$\Lambda = \delta(P_1 \dotplus \cdots \dotplus P_k)\delta^{-1}$，$\delta$为正则矩阵，$P_1, \cdots, P_k$为属于$\varepsilon$的不可约表示。

若P，P'为属于ε的二个不可约表示，则$P \times P' \in \varepsilon$．因此，$P$的系数与$P'$的系数相乘属于$A$，故$A$为一环．由于$A \subset O(\varepsilon_1)$且集合$\varepsilon_1$的表示的每个系数属于$A$，故$A = O(\varepsilon_1)$。

命题2 若$\varepsilon_1, \varepsilon_2$为$G$的二个表示的集合，$O(\varepsilon_1) = O(\varepsilon_2)$的主要条件为包有$\varepsilon_1$的最小的表示的闭集与包有$\varepsilon_2$的最小的表示的闭集相等．

证 命题1已证明了充分性，现在来证必要性，若存在一个不可约表示P属于包有ε_2的最小闭集，而不属于包有ε_1的最小闭集，若f为P的任意$\neq 0$的系数，若g为属于包有ε_1的最小闭集的不可约表示的系数，由正交性

$$\int_G g(\sigma)\bar{f}(\sigma)d\sigma = 0. \tag{1}$$

这对任意$g \in O(\varepsilon_1)$都成立，由于

$$\int_G f(\sigma)\bar{f}(\sigma)d\sigma > 0,$$

故 $f \notin O(\varepsilon_1)$，因此 $O(\varepsilon_1) \neq O(\varepsilon_2)$。

定义 2 G 的表示的集合 ε 称为包有足够多的表示，如果包有 ε 的最小闭集为 G 的所有表示的集合.

由命题 2，这在且只在 $O(\varepsilon)$ 为整个表示环时才发生，由命题 2 的证明可以看出，如果 ε 不是包有足够的表示，则一定存在 G 的一个不可约表示 P，使得(1)对每个 $g \in O(\varepsilon)$ 及 P 的每个系数都成立。

命题 3 若 G 有一忠实表示 P_0，则 $\{P_0, \bar{P}_0\}$ 包有足够多的表示.

记 P_0 的阶为 d_0，$P_0(\sigma) = (t_{ij}(\sigma))$，$(1 \leqslant i, j \leqslant d_0)$。

引理 1 若 f 为 G 上的任意连续函数，a 为 > 0 的数，则由 $2d_0^2$ 个函数 $t_{ij}(\sigma)$，$\overline{t_{ij}}(\sigma)$ 生成的环，包有一个函数 f_1，使对所有 $\sigma \in G$，$|f(\sigma) - f_1(\sigma)| \leqslant a$ 都成立.

证 记 d_0 阶矩阵 ξ 的系数的实部与虚部为 $y_{i+d_0(j-1)}(\xi)$，$y_{i+d_0(j-1)+d^2}(\xi)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant d)$.

P_0 将 G 连续一一地映到 $GL(d_0, \mathbf{C})$ 的一个子群 G_1 上，由于 G 为紧的及 P_0 为同胚，故 G_1 也是紧的，对每个 $\sigma \in G$，有点 $\varphi(\sigma) \in \mathbf{R}^{2d_0^2}$ 其坐标为 $y_1(P_0(\sigma)), \cdots, y_{2d_0^2}(P_0(\sigma))$，于是得到 G 与 $\mathbf{R}^{2d_0^2}$ 中一紧致子集 K 的同胚 φ. 记 $f_2 = f \circ \varphi^{-1}$，则 f_2 为定义在 K 上的连续函数，由 Teotze 扩充定理，f_2 可扩充为整个 $\mathbf{R}^{2d_0}$ 上的连续函数，仍以 f_2 记之. 由于 K 为紧的，故有界，M 为 K 中的点的坐标的上界，由 Weierstrass 逼近定理，存在一个多项式 $Q(y_1, \cdots, y_{2d_0^2}) = Q(y)$，使得 $|f_2(y) - Q(y)| \leqslant a$，对所有满足 $|y_k| \leqslant M$ $(1 \leqslant k \leqslant 2d_0^2)$ 的点都成立. 定义 f_1 为

$$f_1(\sigma) = Q(y_1(P_0(\sigma)), \cdots, y_{2d_0^2}(P_0(\sigma))).$$

于是对于所有的 $\sigma \in G$，有 $|f(\sigma) - f_1(\sigma)| \leqslant a$. 由于

$$y_{i+d_0(j-1)}(\xi) = \frac{1}{2}(x_{ij}(\xi) + \overline{x_{ij}}(\xi)),$$

$$y_{i+d_0(j-1)+d_0^2}(\xi)=\frac{-1}{2}\sqrt{-1}\,(x_{ij}(\xi)-\overline{x_{ij}}(\xi)).$$

故 f_1 可表为 $t_{ij}(\sigma)$ 及 $\overline{t_{ij}}(\sigma)$ 的多项式，引理 1 证毕.

现在来证命题 3 若 ε 不包有足够多的表示，由命题 2，存在 G 上的一个连续函数 $f\neq 0$，使得(1)式对每个 $g\in O(\{P_0,\bar{P}_0\})$ 都成立，若 m 为 $|f|$ 的上界，由于 $\int_G f(\sigma)f(\sigma)d\sigma>0$，故可找到一个数 $a>0$，使得 $am<\int_G f(\sigma)\overline{f(\sigma)}d\sigma$ 成立，由引理 1，存在函数 $f_1\in O(\{P_0,\bar{P}_0\})$，使得 $|f(\sigma)-f_1(\sigma)|\leqslant a$ 对所有 $\sigma\in G$ 都成立，故

$$\left|\int_G f(\sigma)\overline{f(\sigma)}d\sigma\right|=\left|\int_G (f(\sigma)-f_1(\sigma))\bar{f}(\sigma)d\sigma\right|\leqslant am,$$

得到矛盾，命题 3 证毕.

由引理 1，若 G 为紧致群，且至少有一个忠实表示，则每个在 G 上的连续函数可以用 G 的表示环中的函数任意逼近之，以后要证同样的结果，但不需要任何表示存在性的假设，并由此可导出忠实表示的存在性.

若 H 为紧致李群 G 的闭子群，P 为 G 的一个表示，映射 $\sigma\to P(\sigma)$ 在 H 上的收缩为 H 的一个表示，称为 P 在 H 上的收缩.

命题 4 若紧致李群 G 至少有一忠实表示. H 为 G 的一个闭子群，则 H 的每个不可约表示包含在 G 的某个表示在 H 上的收缩之中.

证 若 P_0 为 G 的一个忠实表示，Λ_0 为 P_0 在 H 上的收缩，则 Λ_0 为 H 的一个忠实表示. $\{\Lambda_0,\bar{\Lambda}_0\}$ 包有 H 的足够多的表示，故 H 的每个不可约表示都包含在形如 $\Lambda_0\times\cdots\times\Lambda_0\times\bar{\Lambda}_0\times\cdots\times\bar{\Lambda}_0$ 的表示之中. 但这样的表示显然为 G 的某个表示在 H 上的收缩.

命题 5 若 G 为紧致李群，至少有一忠实表示，H 为 G 的闭子群，且 $H\neq G$，则至少存在 G 的一个不可约表示，它与单位表示不同，其在 H 上的收缩包有 H 的单位表示.

证 在 G 的等价表示类 $\mathscr{K}$ 中选择一表示 P_k. 记 $f(i,j,P)$

为 P_k 的系数，G 的表示环 O 的每个函数 f 可以写为

$$f=\sum_{i,j} a(i,j;P_k)f(i,j;P_k).$$

这里 $\mathscr{K}$ 走遍所有不可约表示类，$a(i,j;P_k)$ 为常数，和号只有有限个 $\neq 0$. 由正交性，有

$$\int_G f(\sigma)d\sigma=a(1,1:E), \tag{2}$$

这里 E 为单位表示.

若表示 $P_k\neq E$ 在 H 上的收缩都不包有 H 的单位表示，每个 $f(i,j;P_k)$ 在 H 上的收缩为 H 的不可约表示的系数的线性组合，若 $P_k\neq E$，这个线性组合只包有不同于单位表示的那些不可约表示的系数.

如同证(2)一样，可证

$$I(f;H)=a(1,1:E)=\int_G f(\sigma)d\sigma,$$

这里 $I(*,H)$ 为在紧致群 H 上的不变积分，且就范化为 $I(1;H)=1$。

等式 $I(f;H)=\int_G f(\sigma)d\sigma$ 对表示环 O 中所有函数都成立，故对所有 G 上的连续函数也都成立，这是因为连续函数可用 O 中的函数任意逼近.

由于 $H\neq G$，故在 G 上存在一连续函数 f，满足：1）f 在 H 上处处为零；2）f 在 G 上恒等于零，于是 $I(f\bar{f};H)=0$ 而 $\int_G f(\sigma)\bar{f}(\sigma)d\sigma\neq 0$. 得到矛盾，命题 5 得证.

回过来考虑任意紧致李群，并不假设 G 有忠实表示. G 中在一切表示下都映为单位矩阵的元素组成的子集记为 $\mathscr{N}$. 显然 $\mathscr{N}$ 为 G 的一个闭的正规子群. 记 $G_1=G/\mathscr{N}$. G 的每个表示映 $\mathscr{N}$ 到单位矩阵. 故在 G_1 上定义一个表示. 反之，G_1 的每个表示对应于 G 的一个表示，故 G 与 G_1 的表示环是同构的.

若 $\sigma\in G_1$，不是单位元素，则在 G_1 中存在一表示 P，使

$P(\sigma) \neq I$. 由此我们将导出 G_1 有一忠实表示。

由于 G_1 为李群，存在 G_1 的单位元素 ϵ_1 的一个开邻域 V_1 不包含 G 的任意子群. 记 V_1 在 G_1 中的补为 F. 若 P 为 G_1 的任何表示，$\mathscr{N}(P)$ 为表示 P 的核，显然 $\mathscr{N}(P)$ 为 G 的一个闭子群，而所有表示 P 的 $\mathscr{N}(P)$ 的交为 $\{\epsilon_1\}$，故

$$\bigcap_P (\mathscr{N}(P) \cap F) = \phi.$$

由于 F 为紧的，存在 G_1 的表示的有限集合 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ 使得 $\bigcap_{i=1}^{k} (\mathscr{N}(P_i) \cap F) = \phi$. 故 $\bigcap_{i=1}^{k} \mathscr{N}(P_i) C V_1$. 而左边为一群，此必为 $\{\epsilon_1\}$ 故 $P_1 \dotplus \cdots \dotplus P_k$ 为 G_1 的一个忠实表示，于是由命题 3，有

命题 6 若 G 为紧致李群，存在 G 的一个表示 P 有如下性质: P 的核的每个元素也被任何其它的表示映为单位矩阵. 表示 P 与 $\bar{P}$ 的系数组成 G 的表示环的生成元.

后一部分由 $G_1 = G/n$, n 为 P 的核，应用命题 3 而得到.

8. 主要逼近定理

在上一节中已经证明(引理 1): 若 G 为紧致矩阵群. 则 G 上任意连续函数可以用 G 的表示环 O 中的函数任意逼近之，这对任意的紧致李群也是对的，这个基本的工作是属于 H. Peter 与 H. Weyl 的.

定理 3 (Peter-Wayl) 若 G 为紧致李群，f 为 G 上的连续函数. a 为任意 >0 的数，则在 G 的表示环中存在一个函数 g，使得 $|f(\sigma) - g(\sigma)| \leqslant a$ 对所有 $\sigma \in G$ 都成立.

记 $\mathscr{F}$ 为在 G 上的所有复值连续函数组成的空间，因为 G 为紧的，故每个 $f \in \mathscr{F}$ 为有界的，记 $M(f) = \max_{\sigma \in G} |f(\sigma)|$. 显然

$$M(af) = |a| M(f), \qquad (a \in \mathbf{C}),$$
$$M(f + g) \leqslant M(f) + M(g).$$

故 $\mathscr{F}$ 成为一度量空间，$\mathscr{F}$ 中二函数 f, g 之间的距离为 $M(f - g)$. 若 Φ 为 $\mathscr{F}$ 的子集，对所有的 $f \in \Phi$, $M(f) \leqslant A$ 都成立，(A

为常数)则称Φ是有界的。

函数$f\in\mathscr{F}$在G的一个子集E上的振幅，定义为对所有的$\sigma,\tau\in E$，$|f(\sigma)-f(\tau)|$的最小上界。

$\mathscr{F}$的子集Φ称为等度连续函数集，如果对于每个>0的数a，存在G的单位元的一个邻域U_a，使得对Φ中任意函数f，G中任意元素σ，f在σU_a的振幅$\leqslant a$。

引理1 若Φ为有界等度连续函数集，a为>0的常数。Φ_1为Φ的子集，若对Φ_1中的任意二个不同元素f,g，有$M(f-g)>a$，则Φ_1为有限集。

证 由于Φ有界，故有常数A，对所有的$f\in\Phi$都有$M(f)\leqslant A$。若$\sigma_0\in G$，则对所有的$f\in\Phi_1$，$f(\sigma_0)$包含在由$|Z|\leqslant A$定义的复Z平面上的一个紧致区域中。于是在Φ中存在一有限子集ϕ_{σ_0}，有如下的性质：对每个$f\in\Phi$，有$f_1\in\phi_{\sigma_0}$，使得$|f(\sigma_0)-f_1(\sigma_0)|<\frac{a}{6}$成立，若$\sigma$为$\sigma_0U_{a/6}$中任意点，则有

$$|f(\sigma)-f_1(\sigma)|\leqslant|f(\sigma)-f(\sigma_0)|+|f(\sigma_0)-f_1(\sigma_0)|+|f_1(\sigma_0)-f_1(\sigma)|<\frac{a}{2}.$$

另一方面，对Φ_1中每一对(f,g)，可对应一点$\sigma=\sigma(f,g)$，使得$|f(\sigma)-g(\sigma)|\geqslant a$，若$\phi_{\sigma_0}$包有$m$个函数，则不能存在多于$m^2$对$(f,g)\in\Phi_1\times\Phi_1$，使得$\sigma(f,g)\in\sigma_0U_{a/6}$，因为否则要存在一对，例如$(f,g)\in\Phi_1\times\Phi_1$，使得

$$|f(\sigma)-f_1(\sigma)|<\frac{a}{2},\ |g(\sigma)-f_1(\sigma)|<\frac{a}{2}$$

是有相同的$f_1\in\phi_{\sigma_0}$，这导出$|f(\sigma)-g(\sigma)|<a$。

由于G是紧致的，故可以用有限个形如$\sigma_0U_{a/6}$的邻域$V_1,\cdots,V_N$来覆盖，而只有有限对$(f,g)\in\Phi_1\times\Phi_1$，使得$\sigma(f,g)\in V_i(1\leqslant i\leqslant N)$。故$\Phi_1$为有限。

引理2 从一个属于有界等度连续函数集合的函数贯中，可以选出一子贯，在G上一致收敛。

证 若μ为任意>0的整数，可以作Φ的有限子集Φ_μ，有如下的性质：1) 若$f, g\in\Phi_\mu$，则$M(f-g)\geqslant\frac{1}{\mu}$，2 若$f\in\Phi$，则存在$g\in\Phi_\mu$使得$M(f-g)<\frac{1}{\mu}$，这可以这样来选择：若$f_1,\cdots,f_r$已定义好，如果存在一个函数$f$使得$M(f-f_i)\geqslant\frac{1}{\mu}$当$1\leqslant i\leqslant r$，选择这样的函数为$f_{r+1}$. 由引理1，这样的归纳步骤不能无限止进行下去，如果停止在f_s，则取$\Phi_\mu=\{f_1,\cdots,f_s\}$. 若$\{f_m\}$为$\Phi$的任何函数贯，$M_0$为所有$>0$的整数集合，我们要用归纳法对$\mu$定义$M_0$的无穷子集$M_\mu$. 若$\mu\geqslant 0$，$M_\mu$已定义好，由于$\Phi_\mu$为有限，故存在$g_{\mu+1}\in\Phi_{\mu+1}$使得$M(f_m-g_{\mu+1})<\frac{1}{\mu+1}$对无穷个$m\in M_\mu$成立. $M_{\mu+1}$为这些整数的集合，在每个M_μ中选择一个整数$m_\mu\geqslant\mu$. 由于$M_\nu\subset M_\mu$当$\nu>\mu$. 我们有$M(f_{m_\nu}-g_\mu)<\frac{1}{\mu}$，$M(f_{m_\mu}-g_\mu)<\frac{1}{\mu}$，故$M(f_{m_\nu}-f_{m_\mu})<\frac{2}{\mu}$，所以$(f_{m_\mu})$在$G$上一致收敛.

对$\mathscr{F}$引进内积运算，若$f\in\mathscr{F}$，$g\in\mathscr{F}$，令

$$(f\cdot g)=\int_G f(\sigma)\overline{g(\sigma)}d\sigma,$$

这里积分有正规化条件$\int_G 1\cdot d\sigma=1$. 显然有如下的性质

1) 当g固定，$(f\cdot g)$对f为线性函数，即$((a_1f_1+a_2f_2)\cdot g)=a_1(f_1\cdot g)+a_2(f_2\cdot g)\quad(a_1,a_2\in\mathrm{C})$.

2) $(g\cdot f)=\overline{(f\cdot g)}$,

3) 若$f\neq 0$，则$(f\cdot f)>0$.

记$\|f\|=(f\cdot f)^{\frac{1}{2}}$，若$a$, b为任意实数，则

$$((af+bg)\cdot(af+bg))=a^2(f\cdot f)+2abR(f\cdot g)+b^2(g\cdot g).$$

这里$\mathscr{R}$表示取实部. 因为对所有实数a, b, 上式都$\geqslant 0$，故

$$(\mathscr{R}(f\cdot g))^2\leqslant(f\cdot f)(g\cdot g),\text{ 即 }|\mathscr{R}(f\cdot g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|.$$

若 θ 为一实数，使 $\exp(\sqrt{-1}\theta)(f\cdot g)=|(f\cdot g)|$ 成立. 在上式中以 $(\exp\sqrt{-1}\theta)f$ 代替 f，即得 Schwarz 不等式

$$|(f\cdot g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|.$$

另一方面，由于

$$\|f+g\|^2=(f\cdot f)+2R(f\cdot g)+(g\cdot g)\leqslant\|f\|^2$$
$$+2\|f\|\cdot\|g\|+\|g\|^2=(\|f\|^2+\|g\|^2),$$

就有 Minkowski 不等式

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|.$$

若 $k(\sigma,\tau)$ 为定义在 $G\times G$ 上满足条件

$$k(\sigma,\tau)=\overline{k(\tau,\sigma)}$$

的复值连续函数，若 $f\in\mathscr{F}$，Kf 定义为

$$Kf(\sigma)=\int_G k(\sigma,\tau)f(\tau)d\tau.$$

要证 $Kf\in\mathscr{F}$. 若 a 为任意 >0 的数，对 G 的单位元 ϵ，存在一邻域 U_a，使得 $|k(\sigma\rho,\tau)-k(\sigma,\tau)|<a$ 对 $\rho\in U_a$ 都成立，事实上，如果不成立，则存在 G 中元素的三个贯 (σ_m)，(ρ_m)，(τ_m)，使得 $\lim\limits_{m\to\infty}\rho_m=\epsilon$，$|k(\sigma_m\rho_m,\tau_m)-k(\sigma_m,\tau_m)|\geqslant a$. 由于 G 是紧的，(σ_m) 及 (τ_m) 有子贯分别收敛于 σ,τ，故得 $|K(\sigma\epsilon,\tau)-K(\sigma,\tau)|\geqslant a$，$k(\sigma e,\tau)-k(\sigma,\tau)|\geqslant a$，这是不可能的，若 $\rho\leftarrow U_a$，我们有

$$|Kf(\sigma\rho)-Kf(\sigma)|\leqslant a\int_G|f(\tau)|d\tau=a(1\cdot|f|)\leqslant a\|f\|.\quad(1)$$

这证明了函数 Kf 的连续性，若 A 为 k 在 $G\times G$ 上的上界，我们还有

$$|Kf(\sigma)|\leqslant A\int_G|f(\tau)|d\tau\leqslant A\|f\|.\qquad(2)$$

由此二不等式得

引理 3 算子 K 将所有 $f\in\mathscr{F}$，$\|f\|=1$ 的集合映到一个有界等度连续函数集合上.

算子 K 的另一个性质为

$$(Kf\cdot g)=(f\cdot Kg).\qquad(3)$$

要证(3)，只要看到

$$(Kf\cdot g)=\int_G\left(\int_G k(\sigma,\tau)f(\tau)d\tau\right)g(\sigma)d\sigma$$

$$=\int_{G\times G}k(\sigma,\tau)f(\tau)g(\sigma)d\sigma d\tau=\int_G f(\tau)\left(\int_G \bar{k}(\tau,\sigma)\right.$$

$$\left.\cdot g(\sigma)d\sigma\right)d\tau=(f\cdot Kg).$$

称数 c 为函数 k 的特征值，如果在 $\mathscr{F}$ 中存在函数 $\varphi\neq 0$，使得 $K\varphi=c\varphi$. 这样的函数称为属于 c 的特征函数. 下面将证明特征值的存在性.

由(2)得 $\|Kf\|\leqslant A\|f\|$，故当 f 在 $\|f\|=1$ 的函数集上变动时，$\|Kf\|$ 是有界的，记 $\|k\|$ 为当 f 在 $\|f\|=1$ 上变动时 $\|Kf\|$ 的最小上界，显然对任意 $f\in\mathscr{F}$，$\|Kf\|\leqslant\|k\|\cdot\|f\|$.

引理 4 $\|k\|$ 为当 $\|f\|=1$ 时 $|(Kf\cdot f)|$ 的最小上界.

证 若 $\|f\|=1$，则 $|(Kf\cdot f)|\leqslant\|Kf\|\cdot\|f\|\leqslant\|k\|$. 现证其逆，若 c 为当 $\|f\|=1$ 时的 $|(Kf\cdot f)|$ 的最小上界. 于是 $|(Kf\cdot f)|\leqslant c\|f\|^2$ 对任意 f 都成立，若 f 与 g 为满足 $\|f\|=1$，$\|g\|=1$ 的二个函数，于是

$$(K(f+g)\cdot(f+g))=(Kf\cdot f)+(Kg\cdot g)$$
$$+(Kf\cdot g)+(Kg\cdot f)=(Kf,f)+(Kg\cdot g)$$
$$+2R(Kf\cdot g)\leqslant c\|f+g\|^2.$$
$$(K(f-g)\cdot(f-g))=(Kf\cdot f)+(Kg\cdot g)$$
$$-2R(Kf\cdot g)\geqslant -c\|f-g\|^2$$

于是 $4R(Kf\cdot g)\leqslant c(\|f+g\|^2+\|f-g\|^2)=2c(\|f\|^2+\|g\|^2)=4c$. 若 $Kf\neq 0$，取 $g=\|Kf\|^{-1}Kf$，则 $\|Kf\|\leqslant c$ 而当 $Kf=0$ 时，前式也成立，故证明了 $\|k\|=c$.

引理 5 $\|R\|$，$-\|k\|$ 中至少有一个函数为 R 的特征值.

证 我们可以在 $\mathscr{F}$ 中找出一贯 (f_m) 使得 $\|f_m\|=1$ 及 $(Kf_m\cdot f_m)$ 趋于 $\|R\|$，$-\|k\|$ 中的一值. 记 $c=\lim\limits_{m\to\infty}(Kf_m\cdot f_m)$.

由引理 2，3，可以假设(如必要时，可以在贯 (f_m) 中选一子贯)，(Kf_m) 在 G 上一致收敛于 φ. 这显然是属于 $\mathscr{F}$ 的，于是

$$\lim_{m\to\infty}M(\varphi-Kf_m)=0.$$

运算 $(f\cdot g)$ 对由 M 定义的度量来讲是连续的，事实上，我们有 $\|f\|^2=\int_G f(\tau)\overline{f(\tau)}\,d\tau\leqslant(M(f))^2$，故

$$|((f_1-f_2)\cdot(g_1-g_2))|\leqslant\|f_1-f_2\|\cdot\|g_1-g_2\|$$
$$\leqslant M(f_1-f_2)M(g_1-g_2).$$

由于 $(Kf_m\cdot f_m)$ 为实的，故

$$\|Kf_m-cf_m\|^2=\|Kf_m\|^2+c^2\|f_m\|^2-2c(Kf_m\cdot f_m).$$

而当 m 趋于∞时右边趋于 $\|\varphi\|^2-c^2$. 故 $\|\varphi\|\geqslant|c|$. 因此，当 $c\neq 0$ 时，$\varphi\neq 0$. 另一方面，由于 $\|Kf_m\|^2\leqslant\|k\|^2=c^2$，故上式右边 $\leqslant 2c^2-2c(kf_m\cdot f_m)$，当 m 趋于∞时是趋于零的. 因此 $\lim\limits_{m\to\infty}\|Kf_m-cf_m\|=0$. 于是 $\lim\limits_{m\to\infty}\|K(Kf_m)-cKf_m\|=0$. 由于 $\lim\limits_{m\to\infty}\|Kf_m-\varphi\|=0$，故 $\lim\limits_{m\to\infty}M\cdot(K(Kf_m)-K\varphi)=0$，因此

$$\|K\varphi-c\varphi\|=\lim_{m\to\infty}\|K(Kf_m)-cKf_m\|=0.$$

这证明了 $K\varphi=c\varphi$. 于是当 $c\neq 0$ 时，引理 5 成立，当 $c=0$ 时，$\|R\|=0$，$Kf=0$ 对每个 f 都成立，故引理 5 是显然的.

$\varphi\in\mathscr{F}$，$\phi\in g$，称 φ,ϕ 相互正交的，若 $(\varphi\cdot\phi)=0$.

若 Φ 为 k 的属于非零特征值的特征函数的集合，可以找到 Φ 的子集 Φ^*，使得：a) 若 φ,ϕ 在 Φ^* 中，$\varphi\neq\phi$ 则 $(\varphi\cdot\phi)=0$；b) 每个 $\varphi\in\Phi^*$，$\|\varphi\|=1$；c) Φ^* 相对于 a) b) 讲是最大的.

引理 6 若 a 为 >0 的数，则在 Φ^* 中只有有限个函数，其特征值的绝对值是大于 a 的.

证 若 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k\cdots$ 为 Φ^* 中的函数，而 $K\varphi_i=c_i\varphi_i$，$|c_i|>a$，我们有 $K(\varphi_i-\varphi_j)=c_i\varphi_i-c_j\varphi_j$，故 $\|K(\varphi_i-\varphi_j)\|^2=c_i^2+c_j^2>2a^2$. 而 $M(K(\varphi_i-\varphi_j))\geqslant\|K(\varphi_i-\varphi_j)\|>a\sqrt{2}$，由引理 1，3 得引理 6.

引理 7 Φ 中任意函数 f 为 Φ^* 中的有限个函数的线性组合.

证 若 c 为 f 的特征值，而 $\varphi_1,\cdots\varphi_h$ 为 Φ^* 中特征值为 c 的函数，令 $f'=f-\sum\limits_{i=1}^{h}(f\cdot\varphi_i)\varphi_i$. 由于 $Kf=cf$，$K\varphi_i=c\varphi_i$，就

有 $Kf'=cf'$，但 f' 是与 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 相正交的．若 ϕ 为 Φ^* 中任一与 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 不同的函数，则 ϕ 有特征值 $d\neq c$，于是有

$$(f'\cdot\phi)=\frac{1}{d}(f'\cdot K\phi)=\frac{1}{d}(Kf'\cdot\phi)=\frac{c}{d}(f'\cdot\phi).$$

故 $(f'\cdot\phi)=0$，故 f' 与 Φ^* 的所有函数正交． 若 $f'\neq 0$，则由 Φ^* 及 $\|f'\|^{-1}f'$ 组成的集仍有性质 a)，b)．这是不可能的． 故 $f'=0$．这证明了引理 7．

由引理 6，Φ^* 为可数集．将集 Φ^{-1} 的元素排成贯 (φ_μ)（按 Φ^* 的元素为无穷或有限，$1\leqslant\mu<\infty$，或 $1\leqslant\mu\leqslant\mu_0$）．$c_\mu$ 为 φ_μ 的特征值．若 $\sum\limits_{\mu}c_\mu\varphi_\mu$ 为 Φ^* 中函数的有限线性组合，则 $\|\Sigma c_\mu\phi_\mu\|^2=\Sigma|c_\mu|^2$.

引理 8（Bessel 不等式）若 $f\in\mathscr{F}$，则级数 $\sum\limits_{\mu}|f\cdot\varphi_\mu|^2$ 收敛且其和 $\leqslant\|f\|^2$.

证 令

$$g_i=f-\sum_{\mu\leqslant i}(f\cdot\varphi_\mu)\varphi_\mu.$$

若 Φ^* 的元素为无限个，则 i 为任意正整数；若 Φ^* 有限，则 i 最多为 Φ^* 的个数，于是 $g_i\varphi_\mu=0(1\leqslant\mu\leqslant i)$ 由此得到

$$\|f\|^2=\|g_i\|^2+\sum_{\mu\leqslant i}|f\cdot\varphi_\mu|^2.$$

这证明了引理 8．

引理 9 若 $f\in\mathscr{F}$，$\sum\limits_{\mu}(Kf\cdot\varphi_\mu)\varphi_\mu$ 在 G 上一致收敛于 Kf.

证 我们有

$$\sum_{\mu}^{j}(Kf\cdot\varphi_\mu)\varphi_\mu=\sum_{\mu}^{j}(Kf\cdot\varphi_\mu)=\sum_{\mu}^{j}(f\cdot K\varphi_\mu)\frac{K\varphi_\mu}{c_\mu}$$

$$=\sum_{\mu}^{j}(f\cdot\varphi_\mu)K\varphi_\mu=K\left(\sum_{\mu}^{j}(f\cdot\varphi_\mu)\varphi_\mu\right).$$

由(2)得

$$M\left(\sum_{\mu}^{j}(Kf\cdot\varphi_\mu)\varphi_\mu\right)\leqslant A\left\|\sum_{\mu}^{j}(f\cdot\varphi_\mu)\varphi_\mu\right\|$$

$$=A\left(\sum_{\mu}^{j}(f\cdot\varphi_\mu)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由引理 8，上式右边当 i, j 趋于 ∞ 时是趋于零的(若 Φ^* 为无限)．故级数是一致收敛的，余下要证其和为 Kf.

令

$$k_n(\sigma,\tau)=k(\sigma,\tau)-\sum_{\mu=1}^{n}c_\mu\varphi_\mu(\sigma)\bar{\varphi}_\mu(\tau).$$

由于每个 c_μ 是实的，故 $k_n(\sigma,\tau)=\bar{k}_n(\tau,\sigma)$，若 $\psi\in\mathscr{F}$，则

$$K_n\psi=K\psi-\sum_{1}^{n}c_\mu(\psi\cdot\varphi_\mu)\varphi_\mu$$

(这里 K_n 是由 k_n 所定义，如同 K 由 k 所定义那样)．于是

$$(K_n\psi\cdot\varphi_\mu)=(K\psi\cdot\varphi_\mu)-c_\mu(\psi\cdot\varphi_\mu)$$

$$=(\psi\cdot K_\mu)-c_\mu(\psi\cdot\varphi_\mu)=0.$$

当 $1\leqslant\mu\leqslant n$，特别取 ψ 为 K_n 的以 $d\neq 0$ 的特征值的特征函数，则 $\psi\cdot\varphi_\mu=0\ (1\leqslant\mu\leqslant n)$．于是 $K\psi=K_n\psi=d\psi$，故 ψ 也是以 d 为特征值的 K 的特征函数．所以 ψ 为以 $c_\nu=d$ 为特征值的特征函数的线性组合，$\psi=\sum\limits_{c_\nu=d}b_\nu\psi_\nu$，而 $b_\nu=\psi\cdot\varphi_\nu$．所以 $b_\nu=0$ 当 $\nu\leqslant n$．若 a 为 >0 的数，选择 n 足够大，大于所有使 $|c_\mu|\geqslant a$ 的足标 μ(这样的足标只有有限个)．这样 $|d|<a$，所以 $\|k_n\|\leqslant a$．于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\|k_nf\|=0$ (若 Φ^* 为无穷；若 Φ^* 为有限，则 $K_nf=0$，n 为 Φ^* 元素的个数)．但

$$K_nf=Kf-\sum_{\mu=1}^{n}(Kf\cdot\varphi_\mu)\varphi_\mu,$$

故 $\|Kf-\Sigma(Kf\cdot\varphi_\mu)\varphi_\mu\|=0$．这证明了引理 9．

引理 10 若函数 $k(\sigma,\tau)$ 为 $\chi(\sigma^{-1}\tau)$ 的形式，χ 为 G 上的连续函数，则 k 的每个以特征值 $c\neq 0$ 的特征函数是 G 的一表示函

数.

证 若$f\in\mathscr{F}$, $\rho\in G$, 记 $f^\rho(\sigma)=f(\rho\sigma)$, 若$f$为以特征值$c\neq 0$的$k$的特征函数，我们有

$$cf^\rho(\sigma)=\int_G \chi(\sigma^{-1}\rho^{-1}\tau)f(\tau)d\tau=\int_G \chi(\sigma^{-1}\tau')f(\rho\tau')d\tau'$$
$$=\int_G \chi(\sigma^{-1}\tau')f^\rho(\tau')d\tau'.$$

故 f^ρ 仍以c为特征值的特征函数. 若以c为特征的函数为φ_1, $\cdots$, φ_h组成Φ^*, 由引理 7

$$\varphi_i^\rho=\sum_{j=1}^{h} g_{ij}(\rho)\varphi_j,\quad g_{ij}(\rho)=\varphi_i^\rho\cdot\varphi_j,$$

若$P(\rho)$为矩阵$(g_{ij}(\rho))$. 由于 $\varphi_i^{\rho_1\rho_2}=(\varphi_i^{\rho_2})^{\rho_1}$, 故 $P(\rho_1\rho_2)=P(\rho_1)P(\rho_2)$. 另一方面，由于每个$\varphi_i$在紧致群$G$上连续，故也在$G$上一致连续，于是对每个$a>0$, 存在$G$的单位元的邻域$U_a$, 使得 $M(\varphi_i^\rho-\varphi_i)>a$ 当$\rho\in U_a$时成立. 所以

$$\lim_{\rho\to\epsilon} g_{ij}(\rho)=\lim_{\rho\to\epsilon}\varphi_i^\rho\cdot\varphi_j=\delta_{ij}=g_{ij}(\epsilon).$$

映射$\rho\to P(\rho)$将G映入到阶为h的矩阵中，为G的一个连续映射，故g_{ij}为表示函数. 但

$$\varphi_i(\rho)=\varphi_i^\rho(\epsilon)=\sum_{j=1}^{h} g_{ij}(\rho)\varphi_j(\epsilon).$$

这表明φ_i为表示函数. 引理 10 得证.

引理 11 若χ为G上的连续函数，且$\chi(\sigma^{-1})=\bar{\chi}(\sigma)$, a为>0的数，则存在G的一个表示函数g, 使得$M(\chi-g)<a$.

证 若K为函数 $k(\sigma,\tau)=\bar{\chi}(\sigma^{-1}\tau)$ 的算子. 取单位元的邻域V, 使得不等式

$$|\bar{\chi}(\sigma^{-1}\tau)-\bar{\chi}(\sigma^{-1})|<\frac{a}{2}$$

对所有的$\tau\in V$都成立，作一非负值的连续函数f_1, 使得 $f_1(\epsilon)\neq 0$, $f_1(\sigma)=0$ 当$\sigma\notin V$. 于是 $J=\int_G f_1(\tau)d\tau\neq 0$, 令 $f=\xi^{-1}f_1$,

则 $\int_G f(\tau)d\tau = 1$. 因此,

$$|\chi(\sigma) - Kf(\sigma)| = |\bar{\chi}(\sigma^{-1}) - Kf(\sigma)|$$
$$= \left|\int_G (\bar{\chi}(\sigma^{-1}) - \bar{\chi}(\sigma^{-1}\tau))f(\tau)d\tau\right| < \frac{a}{2}.$$

由引理 9,10, 存在一表示函数 g, 使得

$$M(Kf - g) < \frac{a}{2},$$

于是 $M(\chi - g) < a$.

若 f 为 G 上任意连续函数, 令 $\chi_1(\sigma) = f(\sigma) + \overline{f(\sigma^{-1})}$, $\chi_2(\sigma) = \sqrt{-1}(f(\sigma) - \bar{f}(\sigma^{-1}))$, 则 $\chi_i(\sigma^{-1}) = \bar{\chi}_i(\sigma)$ $(i = 1,2)$ 及

$$f = \frac{1}{2}(\chi_1 - \sqrt{-1}\chi_2).$$

由于 $\chi_1(\sigma)$, $\chi_2(\sigma)$ 可以用表示系数来任意逼近, 故 f 也是. 定理 3 得证.

9. 主要逼近定理的初步应用

定理 4 紧致李群至少有一忠实表示.

证 G 为紧致李群,由第 7 节命题 6, 为了要证明 G 有忠实表示, 只要证明: 若 $\sigma \in G$, $\sigma \neq \epsilon$, 则存在 G 的表示 P, 使得 $P(\sigma) \neq I$. 若 f 为 G 上的连续函数, 且 $f(\sigma) \neq f(\epsilon)$. 由于 f 可以用表示函数任意的逼近, 故存在一表示函数, 在 σ 与 ϵ 上取不同的值,定理得证.

命题 1 若 H 为一紧致李群 G 的闭子群, H 的任意不可约表示包在 G 的某个表示在 H 上的收缩中.

证 由定理 4 及第 7 节命题 4 即得.

命题 2 若 f 为紧致李群 G 上的连续函数且

$$f(\sigma) = f(\tau\sigma\tau^{-1})$$

对所有 σ, $\tau \in$ 都成立. 若 a 为任意 > 0 的数, 则存在 G 的不可约表示的特征的线性组合 f_1, 使得 $|f(\sigma) - f_1(\sigma)| \leqslant a$ 对所有 $\sigma \in G$

都成立.

证 若 P 为 G 的任意不可约表示，记 $P(\sigma)$ 的系数为 $g_{ij}(\sigma)$，有

$$g_{ij}(\tau\sigma\tau^{-1}) = \sum_{k,l} g_{ik}(\tau) g_{kl}(\sigma) g_{lj}(\tau^{-1}).$$

及 $g_{lj}(\tau^{-1}) = \bar{g}_{lj}(\tau)$ 由正交关系

$$\int_G g_{ij}(\tau\sigma\tau^{-1}) d\tau = 0 \quad 若 i \neq j,$$

$$\int_G g_{ii}(\tau\sigma\tau^{-1}) d\tau = d^{-1}\chi(\sigma).$$

这里 d 为表示 P 的阶，χ 表示 P 的特征.

由逼近定理，在表示环中存在一函数 f_2，使得 $|f(\sigma) - f_2(\sigma)| < a$ 对所有 $\sigma \in G$ 成立，故

$$\left| \int_G f(\tau\sigma\tau^{-1}) d\tau - \int_G f_2(\tau\sigma\tau^{-1}) d\tau \right| < a.$$

由于 $f(\sigma) = f(\tau\sigma\tau^{-1})$，就有 $\int_G f(\tau\sigma\tau^{-1})\, d\tau = f(\sigma)$. 另一方面 f_2 为 G 的不可约酉表示的系数的线性组合，故

$$f_1(\sigma) = \int_G f_2(\tau\sigma\tau^{-1}) d\tau$$

为 G 的不可约表示的特征的线性组合.